URALIS

ATIONE

MINANDAM.

DISPUTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

PENDULO EJUSQUE ADPLICATIONE AD TELLURIS FIGURAM DETERMINANDAM.

Typis exscripsit A. Zweesaardt.

DISPUTATIO MATHEMATICA INAUGURALIS

DE

PENDULO EJUSQUE ADPLICATIONE AD TELLURIS FIGURAM DETERMINANDAM,

QUAM

ANNUENTE SUMMO NUMINE,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

HERMANNI BOUMAN,

Theol. Doct. et Prof. Ordin.

AMPLISSIMIQUE SENATUS ACADEMICI CONSENSU, ET NOBILISSIMI ORDINIS MATHESEOS AC PHILOSOPHIAE NATURALIS DECRETO,

PRO GRADU MAGISTERII ET DOCTORATUS

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN ACADEMIA RHENO-TRAJECTINA

RITE ET LEGITIME CONSEQUENDIS

PUBLICO ET SOLEMNI EXAMINI SUBMITTIT

PETRUS van GALEN,

ARENACO-GELRUS.

AD DIEM 10 FEBRUARII 1830, HORA 12.

AMSTELODAMI,

APUD C. G. SULPKE.

1830.

PARENTIBUS OPTIMIS CARISSIMIS

SACRUM.

Credis autem in hoc maximo et pulcherrimo corpore, inter innumerabilis stellas, quae noctem decore vario distinguunt, quae aëra minime vacuum et inertem esse patiuntur, quinque solas esse, quibus exercere se liceat, ceteras stare, fixum et immobilem populum? Si quis hoc loco me interrogaverit: quare ergo non quemadmodum quinque stellarum, ita harum observatus est cursus? huic ego respondebo: Multa sunt quae esse concedimus: qualia sint ignoramus. Habere nos animum, cujus imperio et impellimur, et revocamur, omnes fatebuntur: quid tamen sit animus ille rector dominusque nostri, non magis tibi quisquam expediet, quam ubi sit. — Adeo animo non potest liquere de ceteris rebus, ut adhuc ipse se quaerat.

SENECA.

Praefatio.

Homines, hanc vitam viventes, nil propius adtingit tenetque magis, quam quae a nobis colitur et incolitur terra. Quod ita verum est, tot seculorum suffragiis comprobatum, ut in dubium vocari nequeat; praesertim si reputemus, Cosmogonias ut vocant ab antiquo inde aevo exstitisse multas et varias, tellurisque figurae indagationem in Astronomiae problematibus primum et obtinuisse locum et obtinere etiamnunc. Neque immerito: telluris enim figurae accurata cognitio maximi sane est habenda momenti, quippe quae in permultis eisque gravissimis occurrat Astronomiae quaestionibus, atque in superficiei mensuris instituendis, variisque determinandis terrae dimensionibus neutiquam contemni possit. Eoque minus videtur negligenda, quandoquidem ex illa sola repetenda est quantitas, quae fundamentum praebeat mensurae cuidam omnibus terrae nationibus communi, frustraque ad hodiernum usque diem in metro atque penduli longitudine quaesitae. Ipsa vero haec penduli longitudo, ad diversas determinata telluris regiones, ex omnibus rationibus hucdum cognitis, aptissime adhibetur ad investigandam telluris figuram. Quapropter hanc materiam disputationis sumere argumentum, haud incongruum existimavi.

Antea vero quam ad ipsam transeam disputationem, grato animo recolere palamque profiteri lubet humanitatem qua me excepere praeceptores, quorum scholis interesse, atque egregia institutione frui mihi contigit. In his quin primum locum tibi tribuam clar. MOLL, Promotor aestumatissime! nullus dubito. Te namque duce et auspice nil videbatur desperandum: atque benevolentia singularis erga me tua cum pari conjuncta prudentiâ eam in me habuit vim, ut studia quibus mentis acies ad verum dirigitur facillime, cum lubenter aggrederer tum pro viribus persequerer. — Neque minus tibi me devinctum sentio, clar. SCHRÖDER! qui egregiis consiliis monitisque semper me instituere haud denegavisti. — Accipite pro his debitas, quas possum, gratias, vobisque persuadeatis beneficia supra modum apud me collocata, quibusque me non minus quam familiari consuetudine condecorastis, nullius diei deleturam memoriam.

Verum et tui clar. SIMONS! gratus et recordor semperque recordabor. A quo enim tempore domo me excepisti tua, ita te mihi praestitisti, ut non tantum doctorem quem colerem, sed et quod pluris facio, amicum qualem multi desiderant, me nactum gauderem; quantum est in me, omni opere id providebo, ne Ennianum istud »benefacta male locata malefacta arbitror" aliquando in me dici possit.

Faxit autem Deus ut in Academiae patriaeque salutem diu etiam vivatis incolumes atque felices.

Hac denique opportunitate amicos, quos habeo numero paucos, fide vero comprobatos, enixe rogo, ut quem hucusque expertus sum, eodem me prosequi pergant amore.

DE

PENDULO EJUSQUE ADPLICATIONE

AD

TELLURIS FIGURAM DETERMINANDAM.

Caput Primum.

INTRODUCTIO HISTORICA.

Est admirabile quiddam in naturae phaenomenis conspicuum, quod impeditissima quaeque simplicibus adeo nituntur principiis: natura sane omnem videtur impendisse operam, ut phaenomenorum multitudo unâ cum ipsorum simplicitate conjungatur, ita ut unum ex altero derivari, aliud ad aliud possit reduci.

Inter varia exempla, quae hujus rei confirmant veritatem, pertinet in primis penduli consideratio, de quo hîc disputare lubet.

Corpus qualecunque filo suspensum, cui motus quidam conciliatur, en ideam quae humanum ingenium, observationi quasi destinatum, non diu occultata latere potuit, quandoquidem quotidie homo ejusmodi circumdatur rebus, qualibus facili admodum negotio tale quid sibi menti repraesentat: atque simplex hic adparatus ansam praebet, non tantum quam accuratissime temporis capiendo mensuram, sed quod primo obtutu mirum omnino videatur, telluris quoque nostri figuram determinando.

Prima penduli idea GALILEO plerumque adscribitur. EDUARDUS BERNARDUS vero refert in epistola ad HUNTINGTONIUM (1), Arabum astronomos temporis minutias fili penduli vibrationibus distinxisse atque mensurasse. Quamvis jam penduli usum, nobis in animo non sit, Arabis abrogare, hanc tamen auctoritatem non satis esse arbitramur, ut illis inconsulte ac temere primam penduli notionem adtribuamus: at contra hoc certum videtur, non ab illis pendulum depromsisse GALILEUM, sed sponte sua ejusmodi adhibuisse adparatum, primumque porro fuisse, qui motus leges penduli investigaverit. A prima inde infantia naturae phaenomenis studiose observandis adsuetus, a° 1583 penduli animadvertit isochronismum in lampadibus, in templo Pisae suspensis, atque forte fortuita commotis (2), atque rationem perscrutatur, quae existit longitudinem diversorum pendulorum inter, atque tempora quae ab illis adhibentur, ad diversas vibrationes absolvendas, quod nimirum tempora sunt in subduplicata ratione longitudinum (3): hanc porro legem adplicat ad determinandam templi testudinum altitudinem, comparando sc. vibrationes lampadum modo memoratarum, cum illis quae eodem tempore pendulo absolvuntur cognitae longitudinis.

Quamvis ratio modo allata inter pendulorum longitudinem atque inter tempora, a GALILEO non demonstretur, quippe quae ab ipso experientiâ deducatur, facile tamen ex illis, quae apud eundem exstant theorematibus de motu naturaliter accelerato repeti potest demonstratio; duo enim pendula inaequalis longitudinis, similes arcus describentia, considerare licet tanquam duo plana diver-

(1) *Philosophical Transactions*, Tom. 14 (1684) n° 158. pag. 567. Cff. WEIDLERI *Historia Astronomiae* pag. 220. DUTENS *Recherches sur l'origine des découvertes attribuées aux modernes*. Tom. 2 pag. 117. BAILLY *Histoire de l'Astronomie moderne*. Tom. 1 pag. 246. DELAMBRE *Histoire de l'Astronomie du moyen age* pag. 8.

(2) GALILEO GALILEI *discorsi e demostrazione matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla Mecanica ed i muovimenti locali. Discorso* 1. in »*ejus Operibus*" ed. Florent. 1718. Tom. 2 pag. 538. 539. Cf. Tom. 3 pag. 171. 419. VIVIANI in vita GALILEI, quae exstat in *ejus Oper.* Tom. 1 pag. 63. praef.

(3) GALILEI *Oper.* Tom. 2 pag. 538.

simode sed similiter inclinata: jam vero tempora descensuum per plana similia sunt uti dimidiae dignitates altitudinum planorum (1): tempora quae duo haec pendula adhiberent ad semioscillationem absolvendam, erunt igitur uti dimidiae dignitates ex amplitudinibus arcuum, aut quoniam hi arcus sunt similes inter se, uti dimidiae dignitates radiorum sive longitudinum pendulorum; sed numerus vibrationum eodem tempore est in ratione inversa durationis singularum oscillationum: igitur longitudines pendulorum erunt uti quadrati numeri oscillationum.

2. Vibrationum isochronismum, quo nititur tota haec demonstratio, GALILEUS deduxit ex theoremate ab ipso demonstrato (2) »mobile quod descendit per chordas qualem arcum cunque subtendentes, omnes temporibus aequalibus percurrere", unde experientiâ duce concludit, arcus quoque ad chordas pertinentes eodem tempore absolvi, quamvis tempus lationis paulo brevius sit per arcus quam per chordas; atque inde porro colligendum illi videtur, lationem omnium velocissimam ex termino ad terminum non per brevissimam lineam, nimirum per rectam, sed per circuli portionem fieri (3). Quamvis theorema quo hae conclusiones superstruuntur, verum omnino sit, atque omnes penduli oscillationes isochronae sint, si non per circuli arcus, sed per horum chordas moveatur pendulum, duo tamen corollaria inde ducta, non nisi opinatam continent veritatis speciem. Quod ad posterius sc., ab longo inde jam tempore cognitum est, non esse circulum sed cycloidem lineam celerrimi descensus: prioris vero fallaciam GALILEO ignoratam mansisse, non mirum videtur, quum vel acutissimo observatori solâ observatione duce, propter visus aciem, arctis adeo limitibus circumscriptam, facile elabi possit, unius ejusdemque penduli excursus latiores angustioribus esse tardiores.

HUGENIUS primus fuit, qui penduli oscillationes non aeque diuturnas, sed

(1) GALILEI *Dialog.* 3 *de motu naturaliter accelerato* prop. 4. 5. in *Oper.* Tom. 2 pag. 593. 594.

(2) *Ibid* prop. 6 in *Op.* Tom. 2 pag. 594. Cf. *Dial.* 1 in *Op.* Tom. 2 pag. 538.

(3) *Dial.* 1 *Op.* Tom. 2 pag. 538. *Dial.* 3. *Op.* Tom. 2 pag. 627.

brevioris temporis eas, quae per minores arcus incedunt, experimento deprehendit. Quodsi vero omnium vibrationum latitudo plane eadem constanter maneret, nullius momenti foret quam diximus inaequalitas; sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magnam satis conflari opinabatur HUGENIUS. Ideo remedium quaesivit, quo reciprocationum penduli latiorum angustiorumque tempora mathematice aequalia semper evaderent: sibi igitur proponebat problema investigandi curvam, in qua tempora descensus, quibus mobile a quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum pervenerit, sint inter se aequalia, invenitque cycloidem huic conditioni satis facere (1). Non aliud igitur erat agendum, nisi quod ejusmodi construeret pendulum, quale motu suo cycloidis arcum describeret: quod perfecit suspendendo perpendiculum inter binas lamellas, secundum semicycloidem inflexas, quandoquidem ex theoria de evolutione curvarum (2) constaret, semicycloidis evolutione aliam semicycloidem describi evolutae aequalem et similem. Quam quidem constructionem postea reliquerunt propterea quod 1, Tautochronismus ille cycloidis, HUGENIO repertus, si rem accuratius consideres, non nisi in vacuo locum habet: 2, quod in praxi non ita facilis est perfectae cycloidis constructio; 3, quod non evitanda est magna frictionis quantitas, ex iteratis iteratisque contra laminas motibus oriunda: 4, quod motus in cycloide ad unum dumtaxat adstringitur suspendendi modum, illum nimirum, quo pendulum filo suspenditur flexibili; 5, quod pendulum circulare in omnibus praxeos circumstantiis summam exhibet accurationem, dummodo arcuum amplitudo, quoad ejus fieri possit, sit minima.

3. Quae hucusque in medium fuere prolata, ejusmodi spectant pendulorum species, quales revera in natura existunt, tametsi ratio inter tempora atque longitudines pro talibus tantummodo pendulis locum habeat, quorum fila inflexilia, gravitate expertia, totamque massam velut in unum punctum collatam

(1) HUGENII *Horologii oscillatorii* Part. 2. prop. 25, in *ejus Operibus variis* ed. 'S GRAVESANDE 1724. Tom. 1 pag. 87.

(2) *Ibid* part. 3 prop. 6, in *Op. var.* Tom. 1 pag. 96.

censeri possint. Quamvis hujus penduli species non sit nisi idea mathematica, omnes tamen alias ad ipsam posse reduci, haud esset incongruum, quandoquidem tum demum in promtu esset terminus comparationis, ad quem omnes ejus proprietates referrentur.

Jam vero quodque pendulum compositum, sive ejusmodi quale natura fert, considerari licet quasi constans ex innumeris pendulis mathematicis sive simplicibus, si haec consideres suspensa filis ad diversas distantias a puncto suspensionis remotis, atque hujus penduli compositi motus medium quasi tenet inter omnes motus pendulorum simplicium, quae orientur, si horum quodque per se solum filo fuisset suspensum. Duae enim hìc adsunt vires, quarum conjunctio hanc motus compensationem atque distributionem producit: ab una sc. parte vi gravitatis omnia pondera, e quibus pendulum compositum consisti cogitatur, eodem tempore descendunt; ab altera vero parte filorum inflexilitate in eodem hoc tempore arcus describere coguntur, distantiae a puncto suspensionis proportionales. Quo facto puncto suspensionis propioribus remotiores accelerantur, atque hae vice versa retinent vibrationes proximorum. Erit igitur in filo punctum quoddam, cujus motus a reliquis neque retardatur neque acceleratur, sed idem semper manet quasi solum filo suspensum: hoc punctum vocatur oscillationis sive agitationis centrum, atque necessario reperitur in omnibus corporibus solidis, circa axin horizontalem oscillantibus. Veram hujus centri indagationem primus instituit nostras HUGENIUS, ejusque generalis de hoc centro theoria duabus nititur hypothesibus: 1, si pondera quotlibet vi gravitatis suae moveri incipiant, non posse centrum gravitatis ex ipsis compositae altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, adscendere (1); 2, remoto aëris alioque omni impedimento manifesto, centrum gravitatis penduli agitati aequales arcus descendendo ac adscendendo percurrere (2).

Primam hypothesin nil aliud sibi velle, ipse declarat HUGENIUS, quam quod nemo unquam negaverit, gravia nimirum sursum non ferri (3), ideoque vehe-

(1) *Ibid* Part. 4. Hyp. 1 in *Op. var.* Tom. 1 pag. 121.

(2) *Ibid* Hyp. 2. *Op. var.* Tom. 1 pag. 123. (3) *Ibid* pag. 121.

menter errare videntur, qui rationem hujus hypotheseos ex eo deductam HUGENIO profitentur, quod alioqui perpetuum mobile non amplius impossibile sit (1).

Quas hypotheses modo allatas adhibet HUGENIUS eo proposito, ut veritatem (2) GALILEO jam celebratam » grave sc., si a descensu sursum convertat motum suum, ascensurum esse ad eandem unde venerit altitudinem, per quascunque planas superficies contiguas et quomodocunque inclinatas incesserit" generaliter ad centrum quoque gravitatis adplicari possit, indeque sequens deprehendit principium:

» Si pendulum e pluribus ponderibus compositum atque e quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integrae confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt adscendere: hoc facto centrum gravitatis ex omnibus compositae ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat" (3).

Jam videamus, qua ratione verisimiliter hoc principio ductus distantiam centri oscillationis ab axe suspensionis HUGENIUS determinaverit. Ex ipso principio immediate adest aequatio inter altitudinem, qua adscendit centrum gravitatis, atque inter altitudinem qua descendit idem centrum, utrumque ductum in summam ponderum quibus componitur pendulum: jam haud ab re erat, talismodi invenire relationes inter cognitas incognitasque quantitates, quae hîc in censum veniunt,

(1) MONTUCLA *Histoire des mathematiques* Tom. 2 pag. 427. LAGRANGE *Mecanique analytique* Tom. 1 pag. 233. Verba HUGENII, quae huic errori ansam praebere videntur, sunt sequentia: » Et sane, si hac eadem (hypothesi) uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haudquaquam possibilem esse." HUG. l. l. pag. 123.

(2) GALILEI *Oper.* Tom. 2 pag. 537. 583. Cf. HUG. *Horol. osc.* Part. 2. prop. 9 in *Op. var.* Tom. 1 pag. 65.

(3) *Horol. osc.* Part. 4. prop. 4 in *Op. var.* Tom. 1 pag. 126. Hoc idem principium postea nomine » conservationis potentiarum vivarum" summam adeptum est in Mechanica celebritatem.

quibus diversa ratione haec aequalitas exprimatur. Ad unam partem ex theoria vectis sequens deduxerat HUGENIUS theorema: » Si magnitudines quaedam descendant omnes, vel adscendant, licet inaequalibus intervallis, altitudines descensus vel adscensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductae, efficient summam productorum aequalem ei, quae fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines" (1): quo adplicato unum aequationis membrum aequat summam productorum altitudinum in sua pondera ductam. Ad alterum vero aequationis membrum constituendum inservit relatio, quae existit distantiam inter centri gravitatis a puncto suspensionis incognitasque distantiam centri oscillationis atque altitudinem, qua celeritate acquisita punctum indeterminatum possit adscendere, unde habetur descensus centri gravitatis hisce quantitatibus expressus. Jam vero celeritates diversorum punctorum penduli compositi, quum vinculo eodem contineantur, sunt proportionales distantiis diversis a puncto suspensionis: unde conjunctim cum cognita inter celeritates atque altitudines relatione (2) efficitur, summam productorum altitudinum in sua pondera exprimi per functiones distantiarum horum ponderum a puncto suspensionis, atque per functiones quantitatum incognitarum, quas modo diximus. Quo facto, quum harum alterutra, ad eandem elevata potentiam, in utroque aequationis membro occurrat, patet aequationem nil nisi unam continere incognitam, quae est distantia centri oscillationis a puncto suspensionis, sive longitudo penduli simplicis composito isochroni, atque aequalis est quantitati quae orietur, si singula penduli pondera ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, et summa productorum dividatur per id quod fit, ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis (3). Quod theorema fundamentum praebet rationi, qua utebatur HUGENIUS, ad centrum oscillationis diversarum

(1) *Ibid* Part. 4 prop. 3 in *Op. var.* Tom. 1 pag. 125.

(2) *Horol. osc.* Part. 2 prop. 3. 4 in *Op. var.* Tom. 1 pag. 55. 77. GALILEI *de motu naturaliter accelerato* prop. 3.

(3) *Horol. osc.* Part. 4 prop. 5. 6 in *Op. var.* Tom. 1 pag. 127—131.

figurarum et corporum determinandum (1): quo reperto omnia qualiscunque generis pendula ad mathematicum reduci, ideoque omnia inter se invicem possunt comparari.

4. Hactenus penduli theoriam absolverat HUGENIUS, atque quum in omnibus terrae regionibus ejus longitudinem aequalem esse assumeret, illud tanquam modulum mensurae universalis et perpetuae proposuit, cujus tertiam partem nomine Pedis horarii insigniebat (2). Sed eodem fere tempore, quo Parisiis immortalis operis »HOROLOGIUM OSCILLATORIUM" editionem curavit, Academia Scientiarum RICHERUM delegatum misit ad regiones prope aequatorem sitas, ut ibi observationes astronomicas et physicas institueret. Qui quum in insula Caianae mense Augusto 1672 fixarum transitum per meridianum observaret, horologium suum singulis diebus 2′ 28″ tardius moveri, quam pro medio motu solis, experientiâ comperit. Deinde penduli simplicis, ad minuta singula secunda vibrationes absolventis, notavit longitudinem, quam in Gallia redux contulit cum longitudine penduli Parisini, et reperit breviorem esse lineâ unâ cum quadrante (3). Statim ac novum illud phaenomenon HUGENIUS accepit, diversitatem illam non tribui posse majori aëris tenuitati in zona torrida existimavit, sed idem corpus levius esse sub aequatore quam in climatibus inde remotis, atque lentius ibi descendere corpora gravia, quam in Gallia inde conclusit, hujusque rei causam oriri posse agnovit a motu terrae diurno, qui cum major sit in unaquaque regione, prout aequatori est magis vicina, producere debet conatum proportionatum, ad rejicienda corpora a centro, adeoque partem aliquam de gravitate detrahendam (4). Quoniam vero, si terra decies septies citius

(1) *Ibid* prop. 21. 22 *Op. var.* Tom. 1 pag. 154—171.

(2) *Ibid* Part. 1. *Op. var.* Tom. 1 p. 36. part. 4. prop. 25. *Op. var.* Tom. 1 pag. 17. PICARD *Mesure de la Terre* Paris 1671. fol. art. 4. Cf. *Histoire de l'Academie.* Tom. 7 pag. 141.

(3) RICHER *Observations astronomiques faites à Cayenne,* in *Hist. de l'Acad.* Tom. 1 pag. 177. Tom. 7 pag. 320. Cff. NEWTONI *Phil. nat. Princ. math.* lib. 3 prop. 20. ed. HORSLEY Tom. 3 pag. 46. MONTUCLA *Hist. des math.* Tom. 2 pag. 576. Tom. 4 p. 138. DELAMBRE *Hist. de l'Astr. moderne* Tom. 2 pag. 738.

(4) HUYGENS *Discours sur la cause de la pesanteur,* in *Opp. reliq.* ed. 'S GRAVESANDE Vol. 1. pag. 111. Cf. DELAMBRE *Hist. de l'Astr. mod.* Tom. 2 pag. 557.

quam nunc volveretur, vim centrifugam sub aequatore aequalis foret gravitati (1), viresque quibus corpora a centro, circa quod volvuntur, recedunt, sunt inter se ut eorundem quadrata velocitatum (2), necesse est motus terrae diurnus de gravitate $\frac{1}{289}$ partem detrahat. Unde concludit HUGENIUS, habitâ ratione gravitatis diminutionis, quae sequitur rationem quadratorum sinuum latitudinis (3), atque experimentorum RICHERI, penduli simplicis longitudinem sub polo atque sub aequatore. Sed ipse fatetur, prioribus experimentis, quibus hic nititur calculus, non prorsus esse confidendum, speratque fore ut diuturnitate temporis certiores fiamus exacte de variis illis longitudinibus, cum sub aequatore, tum in aliis climatibus; rem enim certe dignam esse, quae summâ diligentiâ indagetur, etiamsi nullum alium inde colligeremus fructum, nisi ut ex theoria illa corrigi possent motus horologiorum pendulorum et accomodari ad metiendas longitudines in mari. Porro effectu motus terrae rotatorii pendulum quiescens a perpendiculari recedendum esse, atque cum verticali angulum facere, quem pro Lutetiis Parisiorum invenit esse 5′ 44″. Declinationem illam longe contrariam esse ei opinioni, quae semper pro vera habita fuerit, funem sc. e quo pendet plumbum, recta versus terrae centrum tendere; angulum autem illum ejus magnitudinis esse, ut facile deberet animadverti, tum per observationes astronomicas, tum per eas quae instituerentur cum libella. Cujus rei, inquit, rationem adferam, quae ipsa pro paradoxo haberi possit, terram sc. non esse plane sphaericam, sed figuram habere sphaerae, versus utrumque polum inclinatae, qualem fere faceret Ellipsis, circa minorem axin circumacta. Credibile autem esse, terram in figuram ejusmodi abiisse, ubi partes ejus collectae sint vi gravitatis (4).

5. Post HUGENIUM NEWTONO quoque experimenta RICHERI circa penduli longitudinem, indeque gravitatis aequatorem versus repertam diminutionem, telluris

(1) HUYGENS l. l. pag. 109.

(2) EJUSD. *de vi centrifuga* Theor. 3 in *Op. var.* Tom. 1 pag. 188.

(3) *Op. rel.* Vol. 1 pag. 114.

(4) HUGENII *Oper. reliq.* Tom. 1 pag. 115. 116.

figurae theoretice definiendae ansam praebent. Quem in finem terrae initio fluidae, sphaeroidis formam induentis, sibi fingens canalem a polo ad centrum, indeque ad aequatorem pergentem, aequilibrii inquirit conditiones (1). Porro terrae homogeneae et quiescentis, cujus axes rationem 100: 101 sequerentur, invenit gravitatem sub polo esse ad gravitatem in sphaeram diametros 100, uti 126 ad 125: et eodem argumento gravitatem sub aequatore in sphaeroidem ad gravitatem in eodem loco in sphaeram diametros 101, uti 125 ad 126. Jam gravitas sub aequatore erit media proportionalis inter gravitates in dictam sphaeroidem et sphaeram: ideo gravitas sub aequatore in sphaeram diametros 101, ad gravitatem sub aequatore in terram, erit ut 126: $125\frac{1}{2}$; unde sequitur gravitatem sub aequatore in longioris axeos apice fore ad gravitatem sub polo in ratione 500: 501.

Idem vero NEWTONUS jam demonstraverat, vim attractionis cujuscunque puncti in quolibet sphaeroidis homogeneae radio, in eadem decrescere ratione, qua distantia puncti istius a centro sphaeroidis minuitur (2); ex quo manifeste efficitur, totum pondus columnae cujusvis in polis vel aequatore incipientis, atque ad centrum terrae porrectae, aequale esse debere producto ex columna ista et ex dimidia gravitate sub polis vel aequatore locum habente. Pondera igitur harum columnarum in ratione erunt $\frac{1}{2} . 101 . 500 : \frac{1}{2} . 100 . 501 = 505 : 501$, unde manifeste apparet, quiescentem hanc sphaeroidem nullo modo in aequilibrio consistere posse. Verum sphaeroide istâ circa axin minorem rotatâ, sub aequatore vis quaedam oritur centrifuga, vi attractionis directe contraria, quae igitur partes $\frac{4}{505}$ de gravitate detrahere debet, ut fluidum aequilibret, cujus axes sint ad invicem uti 100: 101. Quoniam itaque vis centrifuga $\frac{1}{289}$ tantum partem gravitatis sub aequatore detrahet, inde colligitur, ab illa discrimen inter axes produci $\frac{1}{229}$, esseque adeo axes terrestres in ratione 229: 230.

(1) NEWTONI *Princ.* lib. 3. prop. 19. ed. HORSLEY Tom. 3 pag. 35. Cff. HUBE *de Telluris forma liber sing.* Varsoviae 1780. pag. 4. LAPLACE *Mécanique céleste.* Tom. 5 pag. 3. DELAMBRE *Hist. de l'Astr. du dix huitième siècle.* pag. 17. GEHLER's *Phys. Wörterbuch.* Leipzig 1827. Tom. 3 pag. 921.

(2) NEWTONI *Princ.* lib. 1. prop. 91. Corr. 3.

In additamento ad dissertationem de causa gravitatis HUGENIUS, post edita Principia Phil. nat. math., rationem inter telluris axes definire adgressus est. Quem in finem eandem quam NEWTONUS adhibet canalis considerationem, neque tamen principio NEWTONO celebrato, quo nititur praecedens contemplatio, »vires sc. attractionis omnium omnino particularum in ratione compositâ esse ex massarum directa quadratarumque distantiarum inversa," uti ausus est, sed contra eandem perhibet esse gravitatem in terrae meditullio atque in ipsius superficie (1). Quâ suppositione admissâ, diametrum terrae ad axin polum transeuntem, esse invenit in ratione 578: 577.

Quodsi jam utramque theoriam inter se conferamus, significante $\varkappa$ rationem inter gravitatem et vim centrifugam sub aequatore, habetur ex theoria NEWTONI relatio axium atque gravitatum quam proxime uti $1 : 1 + \frac{5}{4}\varkappa$; ex theoria vero HUGENII relatio axium uti $1 : 1 + \frac{1}{2}\varkappa$, relatio gravitatum uti $1 : 1 + 2\varkappa$.

Quantopere igitur hae theoriae inter se differant, observatu tamen dignum videtur (2), in utraque ellipticitatis quantitatem atque differentiam inter gravitatis diminutionem a polo ad aequatorem, in summam collectam, esse eandem, aequaere sc. $\frac{5}{2}\varkappa$.

6. RICHERI observatio, quamvis HUGENIUS et NEWTONUS illi theoriam figurae telluris superstruendam curaverant, per longum adhuc tempus in dubium vocabatur, propterea quod experimentis PICARTI ad Uraniburgum (3) atque ROEMERI Londini 1679 institutis, evinci videbatur, eandem semper manere penduli longitudinem in telluris superficie. Posteaquam vero VARIN, DES HAYES et DE GLOS (4), ad insulam Goream navigantes, inter pendulum ibi minuta secunda oscillans, atque inter pendulum Parisinum, differentiam duarum linearum invenerunt, simileque longitudinis discrimen ad Guadeloupam confirmarunt, hujus rei veritas non amplius dubitari poterat, quamvis discrepantia ex hisce experimentis oriunda,

(1) HUGENII *Oper. reliq.* Vol. 1. pag. 119.

(2) *Mécanique celeste* Tom. 5 pag. 5.

(3) PICARD *Voyage d'Uranibourg* art. 6. *Mém. de l'Acad.* Tom. 7 pag. 208.

(4) *Mém. de l'Acad.* Tom. 7 pag. 451. 456.

si cum illis RICHERI comparantur, indicari videretur, haud parum a vera adhuc recedere repertam penduli simplicis longitudinem. Posthac 1682 COUPLETUS Ulyssipponem navigans retulit (1), horologium suum oscillatorium, quod Parisiis cum medio solis motu congruebat, ibi tardius moveri $2' \, 13''$ singulis diebus, atque ad Paraibam eodem modo tardius incedere quam Parisiis $4' \, 12''$ in 24^h: unde efficitur, pendulum ad minuta secunda oscillans, brevius fuisse Ulyssipponi lineis $1\frac{1}{3}$, atque Paraibae lineis $2\frac{5}{9}$, quam Parisiis. Annis 1699 et 1700 DES HAYES ad Americam iterum navigans, in insulis Caianae et Granadae longitudinem penduli determinavit $438^{lin},5$, in insula Christophori 438,75, atque in insula St. Dominici 439^{lin}. Atque a° 1704 FEUILLEUS Portobeli in America longitudinem penduli, ad minuta secunda oscillantis, esse linearum $437\frac{5}{12}$, atque in insula Martinicae linearum $437\frac{10}{12}$. Deinde DE L'ISLE DE LA CROYÈRE a° 1728 longitudinem penduli Archangelopoli (2) esse $440^{lin},653$ retulit.

Quamvis priora haec eaque rudiora experimenta in universum quidem gravitatis diminutionem a polo aequatorem versus confirmarent, illorum tamen absolutae accurationi minime est confidendum, quandoquidem illorum nulla fere memoratur circumstantia, atque nonnulla quoque, eisdem locis habita, adeo ab invicem differunt, ut contrarium potius comprobari plerumque videatur.

7. Ineunte anno 1735 nova periodus longitudinis penduli determinandae coepit prodire. Academia sc. regia Scientiarum BOUGUERUM, GODINUM, CONDAMINEUM ad regiones misit prope aequatorem, MAUPERTUISIUM vero, CLAIRALDUM, alios polum borealem versus, ut tandem solveretur quaestio de telluris figura, quae tantos scrupulos movit ab eo inde tempore, quo CASSINUS (3), gradum meridiani ad regiones Parisiorum atque Argentorati mensurando, terrae figuram non amplius ad polos complanatam, sed contra ad polos elevatiorem, ad aequatorem vero compressiorem reddidit. Itaque ad oppositam terrae partem nova missio facta est, ut ibi unâ cum mensura gradus meridiani, penduli longitudo exploraretur.

---

(1) *Ibid* 1700. pag. 116. (2) *Comm. Acad. Petrop.* Tom. 4 (1729) pag. 328.

(3) JACQUES CASSINI *de la grandeur* et *de la figure de la Terre* Paris 1720. Cf. MONTUCLA *Hist. des math.* Tom. 2 pag. 572.

Antequam vero haec expeditio in regiones indicatas se commisit, MAIRANUS quam exactissime penduli longitudinem Parisiis indagare sibi proposuit, ita ut comparatio posset institui cum observationibus ab Academicis sumendis (1).

Quandoquidem per longum adhuc tempus plerique, penduli longitudinem explorantes, eâdem quâ MAIRANUS methodo utebantur, paucis indicare lubet, qua in re consistat ejus observandi ratio. Quam proxime pendulum probatorium simplici adpropinquandum curavit: quem in finem adhibet sphaeram, ex plumbo vel aurichalco ductam, quae filo tenuissimo, ex Agave Americana composito, suspenditur; quae suspensio ad sphaeram plumbeam locum habet, allevando cultri ope superficiei partem, absque ut amoveatur; atque ad sphaeram ex aurichalco, applicando discum ex multitio fabrefactum, per cujus centrum, aperturâ praeditum, trahitur filum Agaves, quod cum collâ, qua sphaerae affigitur, superficiei adaptatur. Superior fili pars suspenditur forcipi, ex chalybe ducto, duabus constructo laminis, quae fili extremitatem superiorem arcte tenent, illudque ope cochlearum, prout ratio poscit, constringunt. — Methodo, quâ comparatio penduli vibrationum cum illis horologii perficitur, singulis oscillationibus numerandis, quae methodus quam plurimis obnoxia esse debet erroribus, primus MAIRANUS fuit, qui aliam agendi rationem substituebat. Pendulum sc., cujus longitudo non multum differt a pendulo minuta secunda oscillanti, primum congruit cum pendulo horologii, quocum comparatur: deinde hic consensus evanescit, donec utrumque contrario plane motu insistunt, ita ut altero extremitatem oscillationis sinistram attingente, alterum ad extremitatem dextram perveniat: tum sensim sensimque motum recuperant congruentem, usque dum tandem eodem temporis momento summum oscillationis punctum idque ad unam eandemque partem assequantur. Inter primum atque secundum concursum, pendulum probatorium prae horologio lucratur vel perdit duas oscillationes, prouti brevius vel longius sit pendulo minuta secunda oscillanti; itaque ad in-

---

(1) DE MAIRAN *Experiences sur la longueur du Pendule à secondes à Paris* in » *Mém. de l'Acad.* 1735. pag. 153—220.

veniendum oscillationum numerum, quem pendulum absolvit, nil aliud opus est nisi quod exacte temporis momentum observetur, quo ejusmodi coincidentiae locum habent: quo facto sc., cognito horologii motu, simplici proportione habetur vibrationum numerus, quem pendulum probatorium certo temporis spatio perficit.

Hanc fere agendi rationem ad penduli longitudinem determinandam, adhibuere Academici in regionibus tropicis. Godinus (1) insuper usus est machinâ, quâ jam grahamus Londini et campbelus in insula Jamaicae observationes instituerant (2), cujus machinae pendulum constat ex filo cupreo, cui affigitur sphaera itidem cuprea: suspensio ad superiorem partem perficitur ope frusti chalybis cultri instar, binis adminiculis chalybeis insistentis, in duobus punctis, quae motus axin penduli formant.

Bouguerus loco sphaerae adhibet pondus compositum ex duobus conis truncatis, per basin majorem conjunctis: primus ille ideam profert penduli invariabilis (3); semel sc. longitudine penduli probatorii determinatâ, illud tali modo in diversis locis adhibet, ut longitudine haud mutatâ differentiam tantum observet, quae in oscillationum numero locum habeat. Quo facto mensura evitatur, alioqui quaqua vice, vel incipiente vel absoluto experimento, instituenda: ideo etiam semel penduli mensurâ captâ, errores effugiuntur, qui singulis experimentis possunt inhaerere.

Condamineus praeter pendulum, secundum mairani regulam constructum, bouguerum secutus sumsit pendulum invariabile, quod constat ex simplici virga chalybea, ad cujus extremam partem affixa est lens plumbea; in extrema autem parte superiori decussatim affixum est frustum instar cultri, cujus acies insistunt binis adminiculis chalybeis, formâ cylindricâ pendulum sustinentibus (4).

---

(1) *Mem. de l'Acad.* 1735. pag. 506.

(2) *Philosophical Transactions* 1734 pag. 302.

(3) *Mem. de l'Acad.* 1735 pag. 527; 1736 *Hist.* pag. 116. Bouguer *figure de la Terre* pag. 338.

(4) *Mem. de l'Acad.* 1735 pag. 530; 1745 pag. 476; 1747 pag. 409. Condamine *Journal du Voyage fait à l'Equateur* Paris 1751. pag. 144.

Loca ubi a tribus hisce Academicis praeter Parisios, quibus quisque ante iter susceptum longitudinem penduli determinabat, experimenta instituebantur, fuere Goava parva in insula St. Dominici atque Panama: Portobeli a bouguero et godino observationes habitae sunt, Quiti et ad flumen Jamae a bouguero et condamineo; atque insuper a condamineo solo Parae et Caianae. Qualem vero hi tres Academici longitudinem penduli simplicis, ad centesimam lineae partem consentientes, sub ipso aequatore invenerunt (aequalem sc. $439^{\text{lin}},21$), illa ad perpetuam rei memoriam pyramidi, ad urbem Quiti erectae, fuit insculpta (1).

Quodsi jam illorum experimenta inter se atque cum altitudine poli, ad quam pertinent, comparemus, luculenter patet, gravitatem terrestrium corporum, ad aequatorem accedendo recedendoque a superficie terrestri imminui.

Maupertuisius, polum borealem versus delegatus animadvertit, pendulum Parisiense eundem oscillationum numerum Pelli in Lapponia $59'',1$ citius, quam Parisiis pro 24 horis solaribus mediis absolvere (2), unde iterum gravitatem polos versus augeri est concludendum.

Eodem fere tempore (1738) jacquierus (3) Romae longitudinem penduli minuta secunda in aëre oscillantis aequalem definivit 39,0974 poll. angl.

8. Quaestionem proposuit a°. 1738 Academia regia Scientiarum de maris recessu atque accessu (4). Inter alias praemium reportavit maclaurini ad hanc quaestionem commentatio (5), in qua auctor demonstrat, si terra Ellipsois sit liquida atque homogenea, aequilibrum ubique in illa adesse, et gravitatis directionem undique normalem in illius superficiem, si modo axes illius sint in ratione inversa gravitatum, ad apices axium locum habentium.

---

(1) *Mém. de l'Acad.* 1747. pag. 515. Condamine *Journal du Voyage* etc. pag. 99. 162.

(2) *Mém. de l'Acad.* 1737. pag. 465.

(3) Newtoni *Princ.* ed. jacquier et le seur pag. 115.

(4) De quatuor commentationibus bernoullii, euleri, maclaurini, cavallierii ad hanc quaestionem gravissimam cf. Laplace *Mécanique celeste* Tom. 5 pag. 6. 149.

(5) *Mém. de l'Acad.* 1740. *Prix* Tom. 4 pag. 195. Maclaurin *Treatise of fluxions* § 686.

Clairaldus primo synthetica ratione hypotheses newtono ad terrae figuram eruendam adsumtas, veritati omnino consentaneas esse ostendit (1). Dein vero analyticam methodum prosequens, ex generalibus de aequilibrio fluidorum aequationibus demonstrat, terrae liquidae figuram ellipticam aequilibrio satisfacere, dummodo a sphaera non multum differat; eandem vero veritatem confirmari, ponendo terram constare ex nucleo elliptico, uno vel pluribus fluidis obducto, cujus densitas a superficie ad centrum usque augeatur: indeque ad hoc theorema concludit (2), terrae ellipticitatem unâ cum excessu gravitatis sub polo super gravitatem sub aequatore, in summam collectam, esse aequalem duplici ellipticitati terrae homogeneae (3).

Don jorge juan simul cum godino et don antonio de ulloa ad terrae magnitudinem et figuram explorandam in regiones tropicas missus, primus hoc clairaldi theorema adplicavit ad experimenta, de penduli longitudine sumta, ut inde terrae ad polos complanatio calculo computaretur (4). Excessus sc. gravitatis sub polo super gravitatem sub aequatore, datur ex differentia inter penduli longitudinem sub aequatore atque sub polo: illam quidem cognitam censet ex observationibus a bouguero, condamineo, godino atque a se ipso Quiti institutis; haec vero, comparatis experimentis ad Guarico a se ipso, Parisiis a godino, atque Pelli a maupertuisio habitis, calculo exhibetur ope theorematis, hugenio jam celebrati, secundum quod gravitatis incrementa ab aequatore ad polos versus sunt in ratione quadratorum sinuum latitudinis. Quibus positis, ex theoremate clairaldi concludit fore terrae ellipticitatem heterogeneae $\frac{1}{265}$.

9. In serie experimentorum circa penduli longitudinem, jam sequuntur illa, quae secundum mairani methodum instituebantur a caillio ad promontorium

---

(1) *Phil. Trans.* 1737. pag. 19.

(2) Clairaut *Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'Hydrostatique* Paris 1743. pag. 250.

(3) Ellipticitas vero terrae homogeneae aequat $\frac{1}{230}$ ex theoria newtoni.

(4) Don j. juan y a. de ulloa *Observaciones Astronomicas hechas de orden de S. Mag. en las reynos del Peru.* En Madrid 1748. pag. 334.

bonae spei, in insula Mauritii atque Parisiis (1); a gentilo Parisiis, Foulpointi, Manillae, Pondicheri (2), atque a lulofsio Lugduni Batavorum (3). Quod ad duos priores, observandum, illorum pendulorum pondus constare ex duobus conis truncatis, per majorem axem conjunctis: experimenta ita sumta sunt, ut filum Agaves aequale semper redderetur regulae ferreae, cujus dimensiones cum hexapeda comparabantur Peruensi, ita ut penduli probatorii longitudo in omnibus locis eadem maneret (4). Lulofsius sphaeram adhibebat, ex aurichalco ductam, atque plumbeam, cum parva stanni quantitate commixtam: ejus pendulum est variabile, ita ut quaquâ vice ex observata longitudine deducenda sit illa penduli simplicis, minuta secunda oscillantis. Comparatâ longitudine, tali modo tanquam medium ex 14 experimentis conclusâ, cum illa a bouguero sub aequatore repertâ, lulofsius diametrorum terrae rationem fore existimat uti 439,07: 441,7, sive ut 177,3: 178,36 (5).

Memorandae jam veniunt observationes circa penduli longitudinem, quae in

---

(1) La caille *Mém. de l'Acad.* 1751. pag. 436; 1754. pag. 108.

(2) Le gentil *Voyage dans les mers de l'Inde* Paris 1751. Tom. 1 pag. 453. Tom. 2 pag. 327. 332. 592.

(3) Lulofs *Proefnemingen over de langte van den enkelen slinger te Leiden* 1756 in »*Verhand. der Haarl. Maatsch.* Tom. 3 pag. 419—508."

(4) Mathievius negotium in se suscepit, caillii atque gentili experimenta ad easdem, quantum fieri possit, circumstantias physicas reducendi, atque utraque secundum methodum quadratorum minimorum inter se comparando, secundum clairaldi theorema ex caillii observationibus invenit, terrae complanationem fore $\frac{1}{284,4}$, ex gentili vero experimentis eandem complanationem esse $\frac{1}{290,8}$. Cf. delambre *Hist. de l'Astr. du* 18e *siècle* pag. 479. 701.

(5) Lulofs l. l. pag. 506. Quandoquidem in lulofsii experimentis neque arcuum amplitudinis, neque aëris pressionis ratio habebatur, difficile erit, illa ad easdem circumstantias physicas cum illis bougueri reducendi; sin vero experimenta ita comparantur, qualia in promtu sunt cum bougueri ad aequatorem observationibus, inde ex theoremate clairaldi invenimus terrae ellipticitatem $\frac{1}{340,8}$.

variis Russiae regionibus instituebantur, nimirum a GRISCHOWIO (1) Petropoli, Arensbergi, Pernaviae, Dorpati, Revaliae; a MALLETO (2) Petropoli et ad Ponoi in Laponia; a RUMOUSKIO (3) Selenginski, Archangelopi et Kolae. Instrumenta adhibita, sunt 1, pendulum invariabile, a CONDAMINEO constructum, ex simplici virga chalybea compositum; 2, pendulum probatorium, ex Parisiis allatum, cujus pondus, ex duobus consistens conis truncatis, filo Aloës suspenditur: cum his duobus pendulis in omnibus locis memoratis, exceptis Archangelopoli et Ponoi, experimenta habebantur; 3, horologium astronomicum, cujus pendulo eadem, quae Parisiis, conservata est longitudo; 4, horologium oscillatorium, cujus penduli longitudo non mutabatur, quum ex Kola Archangelopolin transferretur.

Horum experimentorum analysin exposuit KRAFTIUS, qui ex omnibus ad eundem temperaturae gradum reductis, atque tum inter se, tum cum pendulo Parisiis minuta secunda oscillanti comparatis simplici, secundum formulam CLAIRALDI terrae adplanationem fore $\frac{1}{293}$ invenit (4).

Tandem ultimo loco in hac periodo mentionem faciamus de illis experimentis, quae ad finem seculi praecedentis, ab Hispanis facta sunt. ALEXANDRO MALESPINAE invariabile tradebatur pendulum, ex virga constans abietis, cui ad inferiorem extremitatem adaptatur lens, ex aurichalco ducta, cujus penduli vibrationes inter se comparavit in diversis et borealis et australis semiorbis regionibus, sc. Mulgravi, Nutkae, Monterei, Gadibus, Macai, Acapulci, Manilae, Umatagi, Zamboangae, ad portum Egmonti, in insulis St. Helenae et Conceptionis, ad Monteviedo, portum Jacksoni, in insula Babai, atque Limae (5).

(1) *Novi Comm. Acad. Petrop.* Tom. 7 pag. 449. 465. 495. 514.

(2) *Novi Comm. Acad. Petrop.* Tom. 14, II (1769) pag. 28. Cf. *Phil. Trans.* 1770. pag. 365.

(3) *Novi Comm. Petrop.* Tom. 11 pag. 474; *ibid.* Tom. 16 (1771) pag. 575. 583.

(4) *Nova Acta Petrop.* Tom. 7 (1789) pag. 226.

(5) *Beobachtungen über die Schwere, welche in den Häfen von Europa, Amerika und Asien, auf dem stillen Meere und in Neuholland, während* MALASPINA's *Weltumsegelung, mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind. Mitgetheilt von* OLTMANS in »CRELLE's *Journal für die reine und angewandte Mathematik*" Berlin 1829. pag. 72.

10. CLAIRALDI theoriam figurae telluris ad sphaeroideas, revolutione circa axin minorem circumactas, limitatam esse cognovimus. Recentiores vero Geometrae, in primis LAGRANGIUS (1), LEGENDRIUS (2), LAPLACIUS (3) rem latius extenderunt, atque perscrutati sunt, num et aliae figurae aequilibrio satisfacere possent; atque ex illorum investigationibus manifeste efficitur, revera terram, motu rotatorio praeditam, nullo alio modo in aequilibrio persistere posse, nisi assumas, illam ejusmodi gaudere figura, qualis ex circumvolutione ellipsoidis circa axin minorem oriatur.

LAPLACIUS porro, theoremate CLAIRALDI (4) confirmato, ex omnibus experimentis, quae hucusque de penduli longitudine memoravimus, additis illis quae a DARQUIERIO Tolosae, a LIESGANIGO Viennae atque a ZACHIO Gothae habebantur, quindecim selegit, sc. praeter modo memorata, observationes BOUGUERI sub aequatore, Portobeli, ad Parvam-Goam et Parisiis institutas, CAMPBELI in insula Jamaicae, CAILLII ad promontorium bonae spei, GENTILI ad Pondichery, GRISCHOWI ad Arensbergum, MALLETI ad Petropolin et ad Ponoi in Laponia, MAUPERTUISII ad Pello in Laponia, indeque terrae ad polos adplanationem fore $\frac{1}{335,78}$, calculo exhibuit (5).

Quod si vero omnes observationes circa penduli longitudinem, hucusque prolatas, eo tantum pacto conspiciamus, ut ex illis nil aliud haurire nobis lubeat, nisi quod eis revera insit, luculenter nobis patebit, quamvis per se memoratu omnino dignae sint (6), illas tamen ad quaestionem de telluris figura rite solvendam, minime posse adaptari. Ad quam enim si ejusmodi observatio-

(1) *Mém. de l'Acad. de Berlin* 1773. pag. 121.

(2) *Mém. de l'Acad.* 1784. pag. 370; 1789. pag. 372.

(3) *Ibid.* 1782. pag. 176; 1783. pag. 17. Cf. *Mécanique céleste* Tom. 2 pag. 73.

(4) *Mém. de l'Acad. de Paris* 1782. pag. 185. Cf. *Mécanique céleste* Tom. 2 pag. 102.

(5) *Mécanique céleste* Tom. 2 pag. 150. Cf. *Mém. de l'Acad.* 1789. pag. 42.

(6) Quapropter omnia experimenta hucusque memorata, in tabulam colligere nobis proposuimus, ut itaque in posterum adhuc cum aliis ad eadem loca institutis, possent comparari.

nes aptae sint, inprimis requiritur, ut omnes non tantum summâ curâ et diligentiâ sint factae, sed ut et idem omnibus tribui possit gradus accurationis. Quoad primum, hoc aliis quidem negare nolumus, aliis vero tribui nequit: quod attinet secundum, ex ipsa rei natura facile evinci existimamus, non omnibus eodem modo esse confidendum, quandoquidem errores ab aliis commissi, non nisi sensim gradatimque animadvertuntur atque evitantur.

Pleraque experimenta sumta sunt cum filis Agaves, quae nulli durante experientiâ extensioni, nulli tortui obnoxia esse supponuntur, quod quidem non ita facile veritati consentaneum censemus: porro experimentis, ope ejusmodi sumtis fili Agaves, forcipe comprehensi, longitudo penduli semper justâ longior reddi debet, propterea quod centrum rotationis, hoc agendi modo, parum sub puncto suspensionis formari videtur, ita ut ejusmodi observationes inter se quidem, neque vero cum aliis comparabiles reddi possint. In plurimis praeterea suspensio imperfecta admodum est habenda, quoniam ita plerumque perficitur, ut pendulum non semper in eodem plano verticali remaneat, ut insuper debito majori frictionis quantitati ansam praebeat.

Porro necesse est, omnes observationes inter se comparari, omnes ad easdem reduci possint physicas circumstantias.

Ut primum impleatur requisitum, omnes ejusdem penduli vibrationes isochronas esse, sive ad isochronismum saltem referri oportet. Omnia vero pendula probatoria, hucusque memorata, circulari motu insistunt, in quibus igitur arcus minimae amplitudinis cycloidis arcubus aequales esse supponitur. Amplitudo autem arcuum sensim sensimque diminuitur, ita ut non fieri possit, quin in toto observationis ambitu eadem semper teneatur; demtâ autem hac amplitudinis aequalitate, tollitur quoque isochronismus: ideo requiritur, ut amplitudinis ratio habeatur; quod quidem a plerisque admodum imperfecte perficitur, a nonnullis penitus negligitur.

Ut secundo insuper satisfiat postulato, necesse est, longitudinem penduli, vel ejus vibrationes ad spatium ab aëre vacuo reducere. Impeditur enim gravitatis actio aëre, ita ut longitudines pendulorum in aëre isochronorum, non

sint accurate in eadem ratione, ac illorum quae in vacuo aequalibus intervallis oscillant, h. e. in gravitatis ipsius ratione. Jam vero BOUGUERUS (1) animadvertit, oscillationis admodum parvae tempus aëris renisu quidem nullo modo mutari, quandoquidem tempus oscillationis in arcu descendente eadem augetur quantitate, quantâ in arcu adscendente diminuitur. Agit vero atmosphaera et alia ratione in penduli motum, quoniam pendulum in aëre detrimentum patitur sui ponderis: quae quidem jactura functionem sistit aëris densitatis, secundum aëris pressionem atque temperaturam iterum variabilis; necesse igitur est, ut ratio habeatur gravitatis specificae penduli adhibiti atque barometri altitudinis tempore observationis. Alterutrum vero in observationibus memoratis plerumque negligitur, neve disertis verbis notatur.

Unde itaque manifeste efficitur, omnium horum experimentorum nullum adesse, cui non unus aliusve error inhaereat irreparabilis. Quo facto experimenta quoque inter se neque comparari, neque ad easdem physicas referri possunt circumstantias. Incertitudo, hac ex causa oriunda, minima quidem est censenda propter exiguam ipsarum correctionum quantitatem; semper autem magna admodum remanet, si ad certas conduci velis conclusiones, quandoquidem differentia, quae existit inter penduli longitudinem sub aequatore atque inter illam sub polo, exiguam adeo sistit quantitatem, ut revera quam exactissime cognita esse debeat utraque longitudo, si ex illis quaestiones de gravitatis diminutione atque de telluris figura, omni quo decet certitudinis gradu, adaequare cupias.

11. Arbitrariam itaque admodum fuisse rationem, quâ nonnulli observationibus allatis, ut inde conclusionem traherent de telluris figura, correctiones adplicare voluerint, non est quod moneamus. Quae quidem in plerisque non nisi conjecturâ adhibitâ perfici poterant, quum plerumque elementa deessent, secundum quae institui debuissent. Congruentia, quae aderat inter telluris complanationem, ita ex penduli longitudinibus constructam, atque inter illam, quae ex comparatis Francici et Peruani meridiani gradibus sequebatur, huic con-

(1) BOUGUER *Figure de la Terre* pag. 341.

clusioni initio summa fides tribuenda videbatur; et vel sic tamen per longum adhuc tempus LAPLACII auctoritas hac in re perstitisset, nisi aliae eaeque perfectiores observationes, ex lunae irregularitatibus desumtae, complanationis quantitatem justâ minorem esse indicavissent. Quo facto apud Physicae et Astronomiae cultores desiderium magis magisque excitatum est ad experimenta circa penduli longitudinem, quibus major fides et auctoritas tribui possit, quaeque majori curâ et diligentiâ sumerentur, ut tandem quaestio de telluris figura, quae per penduli longitudinem exactissime decerni videbatur, summâ quâ par est probabilitate, solveretur.

Atque ab hoc inde tempore decretu omnino difficile est, num desiderio ita universe prolato, an vero nisui potius, summam adipiscendi perfectionem, quae omnium hujus seculi productorum sistit characterem, experimenta debeantur circa penduli longitudinem, tantâ instituta curâ et diligentiâ, ut non tantum prioribus majorem conclusionum inter se congruentiam edere, sed quaestionis quoque propositae solutioni admodum adaptari videantur.

Inter haec experimenta primum memoranda sunt, quae ab Astronomis Franco-Gallis BIOTO, ARRAGONE, aliis, datâ occasione gradus mensurae in Francia, instituebantur a Dunkerko usque ad Formenteram: quae porro cum eis conjuncta sunt observationibus, sumtis a BIOTO ad Leith et Unst in Anglia et Scotia (1). Methodus, quam in hac observandi ratione sequebantur, eadem fuit quam jam BORDA et CASSINUS adhibuerant, quum in specula Parisiensi (2) penduli longitudinem determinarent. Penduli sc. probatorii, constantis ex sphaera platinea, cui affigitur filum metallicum, oscillationes comparantur cum oscillationibus horologii astronomici: quo facto ejus longitudine sumtâ, calculo supputatur illa, quam habet pendulum simplex minuta secunda decimalia oscillans.

Posthac Angli gradus mensuram a ROY institutam, quae inter se tantam complanationis dederat quantitatem, ut cum aliis non conciliari videretur, confir-

(1) BIOT *Astronomie Physique* Tom. 3 add. pag. 164. *Conn. des Tems* 1816. pag. 330. *Base du système métrique* Tom. 4 pag. 573.

(2) *Base du système métrique* Tom. 3. Cf. DELAMBRE *Astronomie* Tom. 3 pag. 582.

mandam sibi proponebant: ideoque cum illa compressionis quantitate comparandam, quae ex penduli longitudine sequeretur: quâpropter KATERO mandarunt, ut haec res, quae tantos movit scrupulos, tandem ad optatos exitus perduceretur (1). Principio, ab HUGENIO (2) celebrato, quo »centrum oscillationis et punctum suspensionis inter se converti possunt," jam BOHNENBERGERUS penduli probatorii indicaverat constructionem (3), quâ penduli simplicis longitudo ipsa per se, per distantiam inter centrum oscillationis atque punctum suspensionis, inveniretur. Revertitur sc. pendulum, ita ut, quod in altera positione fuerit centrum oscillationis, in altera fiat punctum suspensionis. Quod vero ejusmodi penduli constructionem magnis prae aliis afficit praerogativis, in eo potissimum est quaerendum, quod non tantum nulla ratio est habenda reductionis molestae admodum ad centrum oscillationis, sed in ipsis quoque de diversa corporis, ex quo pendulum constat, densitate, non amplius quaestionem movere oportet. Ad eandem penduli reversionis constructionem dein sua sponte pervenit KATERUS, quocum penduli simplicis longitudine, Londini minuta secunda oscillantis (4), summâ curâ et diligentiâ determinatâ, ejusdem deinde oscillationes investigavit (5) ad omnes regiones, ubi gradus mensura Anglica locum habuerat.

Memorandae jam veniunt illae circa penduli longitudinem observationes a Sabinio institutae, quarum ambitus, una cum accurata agendi ratione, quam maxime quaestionis de vera telluris figura dilucidandae effectum ediderunt. Tribus vero vicibus habitae a SABINIO sunt: prima sc. vice, in primo PARRII ad polum borealem itinere, vibrationes penduli investigatae sunt ad Brassam, ad insulam Harae atque Melvillae (6): pendula huic scopo inservientia, ex cupro

(1) Cf. EDWARD SABINE *An Account of experiments to determine the figure of the earth, by means of the Pendulum* etc. London 1825. Preface pag. XI.

(2) *Horol. oscill.* Part. 4. prop. 20. in » *Op. var.* Tom. 1 pag. 154.

(3) BOHNENBERGER *Astronomie*, Tübingen 1811. pag. 448. *Id.* in » *Naturwissenschaftliche Abhandlungen*" Tübingen 1826. pag. 12. etc.

(4) *Phil. Trans.* 1818. pag. 87. (5) *Ibid.* 1819. pag. 330. 416.

(6) *Phil. Trans.* 1821. pag. 165. Cf. *Conn. des Tems* 1825. pag. 301; 1827. pag. 393.

ducta, aciebus instructa, adaptabantur horologiis, quorum unum BAILY et DIXON Hammerfesti adhibebant ad Veneris ante solem transitum a° 1769 observandum. Vibrationes pendulorum observatae comparantur cum eorundem oscillationibus, quas Londini absolvebant, atque ita longitudo penduli simplicis ad loca memorata calculo concluditur ex illa, quam KATERUS Londini invenerat.

Dein SABINIUS, ipse per se nave instructus maritima, ad loca prope aequatorem sita (1), penduli, secundum KATERI methodum constructi, vibrationes exploravit; idemque tandem in tertia PARRII expeditione polum borealem versus, in litoribus Groenlandii, Norvegii, Spitsbergii (2), quisnam sit vibrationum numerus, quem pendulum minuta secunda oscillans absolvat, omni qua par est studio investigandum curavit.

Interim Gallo-Franci FREYCINETUM miserunt ad iter circa tellurem perficiendum, in quo speciatim circa penduli longitudinem experimenta institui, ipsi mandabatur (3). Pendula invariabilia, ex aurichalco ducta, quae huic proposito inserviebant, construxerat FORTINUS: illorum vibrationes comparatae sunt cum machina minuta secunda oscillante, tali modo lente mobili instructa, ut cum pendulo probatorio isochrona reddi posset: quae machina sua vice cum chronometris referebatur.

Summum horum experimentorum momentum in ea potissimum est quaerendum circumstantia, quod in latitudinibus australibus, ab aequatore admodum remotis sumebantur, uti ad promontorium bonae spei, et ad insulas Malvinas, quae eadem fere gaudent latitudine australi, quali Londinum situm est ad boream; ideo quam maxime faciunt ad discernendam quaestionem, num revera diversa sit telluris forma in hemisphaerio australi, ab illa quam habet hemisphaerium boreale, uti ex CAILLII gradus mensura evinci debuerit.

Eodem fere temporis intervallo a singulis astronomis singulae observationes institutae sunt cum pendulis Katerianis, nimirum a GOLDINGHAMO in specula

(1) SABINE l. l. pag. 10. 239. (2) *Ibid.* pag. 131. 263.

(3) FREYCINET *Voyage autour du monde* Paris 1825. *Observations du Pendule* 1826. pag. 25.

Madraensi (1), ab BASILIO HALLO in insulis Galapagis, ab eodem unâ cum FOSTERO ad S^t. Blas in Mexico atque ad Rio Janeiro (2); ad Gounsah-Lout a ROBINSONIO et LAWRENCIO (3); in specula Paramattensi (4) in Nova Hollandia a BRISBANIO.

Postea DUPEREUS (5), in itinere circa tellurem, eorundem pendulorum, quibus jam FREYCINETUS utebatur, vibrationes investigavit ad nonnullas duorum hemisphaeriorum regiones, inter alias in insulis Malvinis atque in insula Ascensionis.

FOSTERUS dein, in ultimo PARRII ad polum borealem itinere, Kateriani penduli oscillationes ad Port-Bowen (6) cum illis comparavit, quas idem pendulum in specula Greenwichensi absolverat.

Tandem BESSELIUS longitudinem penduli simplicis in specula Regiomontana determinavit (7): methodus sibi propria, quâ hunc in finem utebatur, in eo consistit, quod non unius sed duorum pendulorum oscillationes investigantur (8), quorum puncta suspensionis hexapedam ab invicem distant: ita ut ex differentia invariabili inter longitudinem duorum pendulorum probatoriorum, calculo concludatur ad longitudinem penduli simplicis scrupula singula secunda oscillantis.

12. Quod jam attinet adplicationem, quae ex observationibus recentioribus, hucusque prolatis, facta est ad determinandam terrae ad utrumque polum compressionem, animadvertendum, BIOTUM ex observationibus, quas circa penduli longitudinem in Francia instituebat, calculo primum concludisse adplanationem fore $\frac{1}{297,7}$: dein vero, postquam nova Lunae theoria LAPLACIO celebrata, hanc complanationem $\frac{1}{305}$ praebuit, eandem fere ex omnibus experimentis suis constituere, sibi operam dedisse.

KATERUS ex omnibus observationibus suis complanationem inter limites $\frac{1}{229,8}$ atque

(1) *Phil. Trans.* 1822. pag. 127. (2) *Ibid.* 1823. pag. 211.

(3) *Phil. Magaz.* Tom. 65 pag. 394. Cf. *Almanak ten dienste der Zeelieden* 1829. pag. 173.

(4) *Phil. Trans.* 1823. pag. 315. Cf. *Conn. des Tems* 1826. pag. 307.

(5) *Conn. des Tems* 1826. pag. 280; 1830. Add. pag. 83.

(6) *Phil. Trans.* 1826. Part. IV pag. 62.

(7) BESSEL *Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels* Berlin 1828. pag. 56. (8) *Ibid.* pag. 3. seqq.

$\frac{1}{597,5}$ cadere comperit: magnam hanc discrepantiam diversae in diversis stationibus adscribit geognosticae soli constitutioni, quae in causa esse potest, cur terrae meditullium non in omnibus locis eadem ratione in pendulum attractionem suam exerceat: quâpropter examinatâ diversâ superficiei conditione, eas observationes inter se conjungendo, quae eis locis instituebantur, ubi idem erat telluris character geognosticus, compressionem concludit fore $\frac{1}{304}$, quae igitur illi iterum adpropinquatur quantitati, quam LAPLACIUS ex lunae irregularitatibus deduxerat.

SABINIUS ex experimentis, in primo PARRII itinere ad polum borealem institutis, complanationem educit $\frac{1}{313,7}$. Dein ex observationibus suis, prope aequatorem atque in tertia PARRII expeditione habitis, complanationem esse $\frac{1}{288,4}$ reperit: cum hisce experimentis conjungendo illa BIOTI atque KATERI, eandem quantitatem fore $\frac{1}{289,1}$.

FREYCINETUS ex observationibus suis, exceptis illis, quae majori attractioni locali obnoxiae sunt, terrae complanationem aequare $\frac{1}{286,2}$ deducit. DUPEREUS ex omnibus suis experimentis ad compressionem $\frac{1}{266,4}$ concludit. Quodsi vero experimenta sua cum illis FREYCINETI comparat, eandem quantitatem esse $\frac{1}{287,7}$ invenit.

Quaenam vero ex experimentis recentioribus circa penduli longitudinem institutis, maxime probabilis sit terrae figura, ad finem hujus disputationis exponere conabimur.

Ratio, quâ ex penduli longitudine in diversis regionibus determinata, terrae figura eliciatur, tota et penitus nititur ea hypothesi, quâ sphaeroidis terrestris, circa axin minorem circumactae, nucleus cujus densitas a superficie ad centrum usque augeatur, aquâ penitus repleatur; haec autem suppositio cum natura minime congruit, quandoquidem magnam superficiei partem undis haud obductam esse, docet observatio. LAPLACIUS hujus quoque circumstantiae ratione habitâ, theoriam telluris considerat mathematicam, atque ex ipsius pervestigationibus inter alia hoc elicitur theorema:

» Quodsi longitudini penduli simplicis, minuta secunda oscillantis ad qualecunque superficiei sphaeroidis terrestris punctum, addatur productum hujus

longitudinis in semialtitudinem hujus puncti supra maris libellam, atque adplicatum in poli semiaxin; incrementum hujus longitudinis, ita correctae, ab aequatore ad polos usque, sumtâ hypothesi, quod terrae densitas, ad profunditatem non adeo magnam, sit quantitas constans, aequabit productum hujus longitudinis ad aequatorem in Sinum quadratum latitudinis, atque in quintas quartas partes relationis, quae existit inter vim centrifugam et inter gravitatem sub aequatore (1)."

Quodsi hoc theorema conferas cum experimentis circa penduli longitudinem habitis, patebit, terrae meditullium neutiquam consistere ex substantia homogenea: porro singulorum stratorum densitatem augeri a superficie ad centrum usque: circumstantiam dein, num terra tota et penitus, an partim dumtaxat fluido obtegatur, in superficiei aequilibrium haud assignabilem proferre mutationem; quod igitur congruit cum adsumta hypothesi: tandem ex regulari admodum ratione, quâ variatio penduli longitudinis legem fere sequitur Sinus quadrati latitudinis, manifeste efficitur, haec strata regulari modo circa terrae centrum gravitatis esse disposita, atque ellipticam fere induere figuram.

(1) LAPLACE in » *Conn. des Tems* 1821. pag. 290. 353; 1822. pag. 284. *Mécanique céleste* Tom. 5 pag. 12. 40.

Caput Secundum.

PENDULI THEORIA, ATQUE METHODI RECENTIORIBUS ADHIBITAE, AD EJUS LONGITUDINEM DETERMINANDAM.

Sectio Prima.

PENDULI THEORIA.

1. Quandoquidem quodcunque pendulum, quod in natura occurrit, considerari potest tanquam corpus solidum, motum suum circa axin quendam invariabilem absolvens, ejus quoque theoriam ex generali motus rotatorii contemplatione haurire lubet: quod merito facere licet, quum motus oscillatorius ipso rotatorio contineatur, ideoque hujus specialem tantummodo casum constituat. Sunt vero aequationes motus rotatorii (1)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= S\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2}\right) dm - S\,(Yx - Xy)\,dm \\ 0 &= S\left(\frac{zd^2x - xd^2z}{dt^2}\right) dm - S\,(Xz - Zx)\,dm \\ 0 &= S\left(\frac{yd^2z - zd^2y}{dt^2}\right) dm - S\,(Zy - Yz)\,dm \end{aligned}\right\}\ldots(A)$$

in quibus ponendo

$$\left.\begin{aligned} N &= S\!\int(Yx - Xy)\,dtdm \\ N' &= S\!\int(Zx - Xz)\,dtdm \\ N'' &= S\!\int(Zy - Yz)\,dtdm \end{aligned}\right\}\ldots(B).$$

(1) *Mécanique céleste* Tom. 1 pag. 72. *Mécanique analytique* Tom. 1 pag. 269. POISSON *Traité de Mécanique* Tom. 2 pag. 138.

habebitur integrando secundum elementum dt

$$\left.\begin{aligned} S\,(xdy - ydx)\,\frac{dm}{dt} &= N \\ S\,(xdz - zdx)\,\frac{dm}{dt} &= N'\ldots\ldots \\ S\,(ydz - zdy)\,\frac{dm}{dt} &= N'' \end{aligned}\right\}\ldots(C).$$

quarum aequationum tertia sufficit ad motum corporis rotationem quandam subeuntis determinandum, si quidem in plano verticali moveri concipiatur.

Referamus corporis motum ad tres axes coördinatorum orthogonales, quorum xy sint horizontales, z vero verticalis, atque supponamus unam solummodo potentiam, gravitatem videlicet, in illud agere: porro planum yz transire centrum gravitatis corporis, atque tandem alium fingamus axin, qui per originem coördinatorum atque per centrum gravitatis corporis transit. Quo facto, si y' et z' sunt coördinati ad novum hunc axin pertinentes, θ vero angulus variabilis, quem hic axis constituit cum axe ipsius z, obtinemus ex cognita coördinatorum transmutatione

$$y = y'\mathrm{Cos}\,\theta + z'\mathrm{Sin}\,\theta, \text{ atque } z = z'\mathrm{Cos}\,\theta - y'\mathrm{Sin}\,\theta,$$

unde substitutis ipsarum y et z valoribus in tertiam aequationum praecedentium prodibit

$$S\left(\frac{ydz - zdy}{dt}\right) dm = -\frac{d\theta}{dt}\,Sdm\,(y'^2 + z'^2)\ldots(1)$$

Quantitas $Sdm\,(y'^2 + z'^2)$ vocatur secundum EULERUM momentum inertiae corporis ratione habita axeos x: quod semper mutari potest in aliud respectu axeos priori paralleli transeuntis corporis centrum gravitatis. Qua mutatione instituta invenitur

$$Sdm(y'^2 + z'^2) = Sr'^2dm + ma^2\ldots.(2)$$

ubi r' significat distantiam qualiscunque puncti corporis, a vero distantiam centri gravitatis ab axe x.

Ponendo vero $\frac{Sr'^2\,dm}{m} = k^2$, atque conjungendo aequationem (2) cum tertia aequationum (C), erit

$$-\frac{dN''}{dt}=\frac{md^2\theta}{dt^2}(k^2+a^2)\dots.(3)$$

Jam vero supposuimus, corporis motum nonnisi per unam potentiam, gravitatem nimirum affici, ita ut in aequationibus (A) et (B) vires X atque Y evanescant, atque restet Z, quam vocemus g. Unde eruitur

$$\frac{dN''}{dt}=Sgydm=g\mathrm{Cos}\,\theta\, Sy'dm+g\mathrm{Sin}\,\theta\, S\,z'dm\dots.(4)$$

Est autem $Sy'dm=o$, quoniam axis ipsius z' transit per centrum gravitatis, atque $Sz'dm=ma$, si m significat massam totius corporis: itaque

$$\frac{dN''}{dt}=g\mathrm{Sin}\,\theta\, ma\dots.(5)$$

quae aequatio conjuncta cum aequatione (3) dabit

$$o=\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{ag\mathrm{Sin}\,\theta}{a^2+k^2}\dots.(6)$$

Ponamus jam dari aliud corpus, cujus massa in unum punctum collecta censeatur, quod ab axe ipsius x distet quantitate l, evadit $a=l$, atque $k=o$, unde aequatio (6) abit in

$$o=\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\mathrm{Sin}\,\theta\dots.(7)$$

Quibus aequationibus inter se collatis prodit

$$l=a+\frac{k^2}{a}\dots.(8)$$

Aequatio (6) exhibet motum qualiscunque penduli, aequatio (7) vero motum penduli mathematici, sive simplicis quod vocant, ita ut ex aequatione (8) pateat, quodcunque pendulum semper ad mathematicum reduci posse, cognitis distantiâ centri gravitatis ab axe ipsius x, sive a puncto suspensionis, atque momento inertiae respectu axeos, centrum gravitatis transeuntis. Est igitur l longitudo penduli simplicis, quod oscillationes suas eodem tempore cum corpore absolvit, sive distantia centri oscillationis a puncto suspensionis.

Ponamus corpus, cujus centrum oscillationis quaeratur, esse sphaeram radii r, massae m, atque filum quo suspenditur, formam induere cylindri, cujus

radius baseos circularis sit ρ, massa μ, atque b longitudo a puncto suspensionis ad peripheriam sphaerae. Est autem momentum inertiae sphaerae respectu axeos, centrum transeuntis $\frac{2}{5}mr^2$: igitur respectu axeos rotatorii $\frac{2}{5}mr^2+md^2$, significante d distantiam puncti suspensionis a centro sphaerae. Momentum vero inertiae cylindri respectu axeos, per punctum medium transeuntis, aequat quantitatem $\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\rho^2}{4}\right)$; igitur respectu axeos rotatorii

$$\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\rho^2}{4}\right)+\mu c^2$$

ubi c denotat distantiam puncti medii cylindri a puncto suspensionis.

Momentum igitur inertiae totius systematis repraesentabitur per quantitatem $\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\rho^2}{4}\right)+\mu c^2+\frac{2}{5}mr^2+md^2$, sive propter $c=\frac{1}{2}b$, atque $d=b+r$, per

$$\mu\left(\frac{b^2}{12}+\frac{\rho^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)+m\left(\tfrac{2}{5}r^2+(b+r)^2\right)$$

Erit igitur longitudo penduli simplicis, quod cum hoc systemate easdem oscillationes eodem tempore perficit

$$l=\frac{\mu\left(\frac{b^2}{3}+\frac{\rho^2}{4}\right)+m\,(b^2+2br+\frac{7}{5}r^2)}{\mu\,\frac{b}{2}+m\,(b+r)}$$

Pro $r=o$ atque $m=o$, sive pro virga cylindrica, ad alterutram partem extremam suspensa, habebitur

$$l=\frac{2b}{3}+\frac{\rho^2}{2b}$$

atque sic pro quocunque alio corpore, regularem formam induenti, aliae atque aliae producuntur expressiones, quibus semper longitudo penduli simplicis assignari potest, quod cum dato corpore easdem oscillationes eodem absolvit tempore.

Quando corpori, motu oscillatorio gaudenti circa axin quendam fixum, jam conciliatur motus circa axin priori parallelum, momentum inertiae respectu axeos, centrum gravitatis transeuntis, immutatum manet. Quodsi igitur distantia corporis a novo axe rotatorio designetur per a′, atque longitudo penduli simplicis, oscillationes suas eodem tempore cum corpore absolventis, per l′, prodibit

$$l' = a' + \frac{k^2}{a'} \ldots\ldots (9)$$

Eliminando jam k^2 inter aequationem (8) et (9) nanciscimur

$$a'(l - l') = (a - a')(a + a' - l) \ldots\ldots (10).$$

Quodsi jam in hac aequatione $a + a' = l$, i. e. si secundus axis transit centrum oscillationis, ad priorem axin pertinentis, erit $l - l' = 0$: unde sequitur, si centrum oscillationis atque punctum suspensionis inter se convertuntur, in utraque penduli positione tempus oscillationis esse ejusdem durationis (1).

2. Qualiscunque generis pendula referri solent ad pendulum mathematicum: hujus igitur motus jam erit investigandus. Quem in finem ad aequationem (7) § 1 recurramus, quae integrata eo pacto, ut pro $d\theta = 0$ sit $\theta = \alpha$, dabit

$$dt = \left(\frac{l}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta\, (\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}\alpha)^{-\frac{1}{2}} \ldots\ldots (1)$$

unde ponendo $l \operatorname{Sin}\alpha = r$ elicitur

$$t = \left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{(\operatorname{Sin}\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot (\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}\alpha)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (2)$$

aut per T significando tempus unius oscillationis

$$T = \pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 \operatorname{Sin}^4 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \ldots\right\} \ldots (3).$$

Haec igitur formula, seriem complectens admodum convergentem, quandoquidem quisque terminus consequens est antecedenti minor, exprimit tempus oscillationis functione longitudinis penduli simplicis, gravitatis atque amplitudinis oscillationis: illaque indicat, quo major sit amplitudo, eo majus quoque esse tempus oscillationis, i. e. penduli velocitatem augeri, prouti major sit arcus, quem facit cum linea verticali: si omnes penduli oscillationes ejusdem sunt amplitudinis, illas quoque esse tautochronas. Quodsi vero omnes ejusdem penduli

(1) Cf. HUGENII *Horol. osc.* Part. 4. prop. 20.

vibrationes essent cycloidales, seu infinite parvae, quae vocantur, illa formam induit

$$T = \pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots (4)$$

quae quidem formula sequentia amplectitur consectaria:

α, Longitudines duorum pendulorum, eodem tempore oscillationes absolventium, sunt uti gravitates, quae in illa agunt.

β, Tempora oscillationis ejusdem penduli in diversis terrae regionibus sunt in inversa ratione radicum quadratarum e gravitatibus.

γ, Tempora oscillationis pendulorum in una eademque telluris regione, sunt inter se uti radices quadratae longitudinum.

δ, Numerus oscillationum, quae in eodem tempore absolvuntur a pendulis ejusdem longitudinis, sunt uti radices quadratae gravitatum.

Eadem valent de duobus pendulis, quae eadem gaudent arcus amplitudine.

3. Quae hucusque disputata sunt, penduli spectabant motum in spatio vacuo oscillantis. Experimenta autem plerumque instituuntur in medio ambiente, cujus renisus una cum frictione ad axes oscillatorios atque filorum flexibilitas in causa est, cur penduli reciprocationes sensim sensimque diminuantur, ita ut tandem in quietem redigatur pendulum. Ponamus aëris renisum esse proportionalem quadrato velocitatis (1), atque frictionem ad axes esse quantitatem constantem, directioni motus contrariam. Quo facto ex form. 7 § 1 habetur aequatio motus

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{Sin}\theta - mv^2 - ng \ldots\ldots (1)$$

in qua m et n sunt quantitates constantes, quae a magnitudine renisus ac frictionis dependent. Ex hac aequatione propter $s = l(\alpha - \theta)$ colligitur

$$0 = v\,dv - mlv^2 d\theta + lg\, d\theta (\operatorname{Sin}\theta - n) \ldots\ldots (2)$$

unde, integrationem ita instituendo, ut v evanescat pro $\theta = \alpha$, elicitur

$$v^2 = \frac{2lg}{1 + 4m^2 l^2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Cos}\alpha - 2lm(\operatorname{Sin}\alpha - \operatorname{Sin}\theta) \\ + \left(1 - \varepsilon^{-2ml(\alpha-\theta)}\right)\left(\operatorname{Cos}\alpha + 2ml \operatorname{Sin}\alpha\right) \end{array} \right\} - \frac{ng}{m}\left(1 - \varepsilon^{-2ml(\alpha-\theta)}\right) \ldots\ldots (3).$$

(1) Cf. BENZENBERG's *Versuche über die Umdrehung der Erde* pag. 161.

Ob minimum valorem quantitatum m et n, uti et quantitatum α et θ ponatur

$$1 - \varepsilon^{-2ml(\alpha-\theta)} = 2ml(\alpha - \theta), \text{ atque}$$

$$\theta = \mathrm{Sin}\,\theta + \tfrac{1}{6}\mathrm{Sin}^3\theta, \quad \alpha = \mathrm{Sin}\,\alpha + \tfrac{1}{6}\mathrm{Sin}^3\alpha$$

ita ut aequatio (3), si brevitatis causa faciamus

$$4ml\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha + n - \tfrac{1}{6}(2ml\,\mathrm{Cos}\,\alpha - n)\,\mathrm{Sin}^2\theta = \lambda \text{ atque}$$

$$4ml\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha + n - \tfrac{1}{6}(2ml\,\mathrm{Cos}\,\alpha - n)\,\mathrm{Sin}^2\alpha = \beta,$$

transeat in sequentem

$$v^2 = 2lg(\mathrm{Cos}\,\theta + \lambda\,\mathrm{Sin}\,\theta - \mathrm{Cos}\,\alpha - \beta\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\ldots.(4)$$

sive quam proxime

$$v^2 = 2lg[\mathrm{Cos}(\theta - \lambda) - \mathrm{Cos}(\alpha - \beta)]\ldots.(5)$$

quae ponendo $\theta - \lambda = \theta'$, $\alpha - \beta = \alpha'$, $\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\theta' = \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha'\,\mathrm{Cos}\,\phi$

abit in

$$v = (2gl)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha'\,\mathrm{Sin}\,\phi\ldots.(6)$$

Vice versa obtinebitur

$$\theta = \theta' + 4ml\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha + n - \tfrac{1}{3}(ml\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \tfrac{1}{6}n)\,\mathrm{Sin}^2\theta'\ldots.(7)$$

unde propter $ds = -l d\theta$, atque $v = \frac{ds}{dt}$ prodit

$$t = \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\int\frac{d\phi}{(1-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha'\,\mathrm{Cos}^2\phi)^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{2}{3}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha'(2ml\,\mathrm{Cos}\,\alpha - n)\left(\frac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\int d\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi(1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha'\,\mathrm{Cos}^2\phi)\ldots(8)$$

quae integrata inter limites $\phi = 0$ atque $\phi = \pi$ praebet

$$T = \pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha' + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2\mathrm{Sin}^4\tfrac{1}{2}\alpha' + \left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\mathrm{Sin}^6\tfrac{1}{2}\alpha' + \ldots\right\}\ldots(9).$$

Patet igitur ex hac aequatione, si illam conferas cum aequatione (3) praecedentis §, tempus oscillationis in arcubus infinite parvis aëris renisu atque axium frictione nullo modo mutari (1). Quod vero attinet oscillationes penduli sim-

(1) Cf. POISSON *Traité de Mécanique* Tom. 1 pag. 405. BOHNENBERGER in » *Naturwissenschaftliche Abhandlungen* Tübingen 1826." pag. 28.

plicis, quae certa gaudent amplitudine, illas, si quidem utriusque seriei duos tantum priores respicias terminos, propter $\alpha - \beta = \alpha'$, minores esse quam in vacuo quantitate $\tfrac{1}{4}\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')$, sive quam proxime quantitate

$$\tfrac{1}{8}\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\beta\,\mathrm{Sin}\,\alpha = \pi(\tfrac{1}{3}ml\,\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{8}n)\,\mathrm{Sin}\,\alpha\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

luculenter apparebit.

Simul autem aequatio (6) indicat, si neglectis quantitatum m et n quadratis et potentiis altioribus, tempus T, quo pendulum oscillat, mediante arcu α' ad tempus oscillationis cycloidalis reducatur, rationem quoque haberi aëris renisus atque ad axes frictionis, ideoque accurate obtineri tempus oscillationis, quasi in vacuo pendulum suas perfecisset vibrationes.

Sectio Secunda.

METHODI RECENTIORIBUS ADHIBITAE, AD PENDULI LONGITUDINEM DETERMINANDAM.

4. Per longitudinem penduli vulgo illa intelligitur, quam habet pendulum mathematicum, si quidem vibrationes cycloidales scrupulorum singulorum secundorum in vacuo absolvat. Quandoquidem ejusmodi pendulum in rerum natura non existit, sed mathematicis tantum reductionibus exhibetur, non fieri etiam potest, quin a priori ejus repraesentetur longitudo: quam itaque a posteriori determinare conati sunt physici. Quem in finem aliquod sumitur probatorium quod vocatur pendulum, cujus oscillationes comparantur cum instrumento, temporis ejusmodi indicanti intervalla, ad quorum unitatem refertur longitudo. Illud jam vel formulis mathematicis, vel ipsa methodo ad pendulum simplex

reducitur: cognitâ igitur longitudine penduli probatorii cognoscitur quoque numerus oscillationum quas absolvisset, si ipsud mathematicum fuisset; unde adhibitis reductionibus necessariis mediante calculo longitudo invenitur, quam haberet pendulum mathematicum, quod certo temporis spatio datum vibrationum numerum in vacuo perfecisset.

Ita agendum est, si in aliquo loco absoluta inveniatur penduli simplicis longitudo: quâ repertâ accurate pro quodam loco normali, ejusdem penduli probatorii si invariabile remanet, numerum oscillationum in quacunque alia regione indagando, ibi quoque, ex cognita inter oscillationum numerum atque longitudines relatione, ipsa concluditur longitudo penduli simplicis, singula minuta secunda in vacuo oscillantis.

Fusius jam prosequamur diversas agendi rationes, quas in hac re subtilissima adhibent physici recentiores.

Methodus Bordae et Bioti.

5. Pendulum probatorium, quantum fieri potest, ad simplex accedendum esse existimant; quem in finem pondus sistit sphaeram ex metallo densissimo platino sc. constructam: quo fit, ut aëris resistentia in penduli motum minimam producat mutationem, ideoque ejus motus per longum tempus persistit.

Filum quo suspenditur sphaera, est metallicum, tenuissimum eo pacto ut aëri quam minima tribuatur superficies: in omnibus partibus homogeneum esse debet, quod exploratur, si ejus frustum quoddam bilance examinatum comparatur cum alio frusto ejusdem longitudinis. — Filum vero ex ejusmodi metallo compositum, est refugiendum, in quod unâ cum gravitate telluris magnetismus effectum edere possit.

Ut filum sphaerae adaptetur, penula inservit cuprea, cujus pars inferior sphaerae sistit partem ejusdem radii ac sphaerae platineae, quae penula ejus

superficiei mediante materia pingui adplicatur: quo facto sphaera successive per puncta superficiei opposita suspendi poterat, ita ut errores corrigerentur, ex inaequali densitate vel sphaericitate imperfecta forte oriundi: — filum ipsi penulae ope cochleae infigitur (1).

Ad extremitatem superiorem filum aciebus suspenditur, quae ad utramque partem collocantur in frustis expolitis durissimi lapidis, quibus ope libellae aëreae horizontalis impertitur positio. Synchronismus hujus cultri suspensionis cum illo penduli efficitur ope cochleae, ad superiorem partem cultri affixae.

Ut summa obtineatur immobilitas, totus adparatus mediante jugamento ferreo ad murum solidissimum adaptatur.

Arcuum amplitudinem demetitur scala horizontalis, ante pendulum collocata, in partes aequales dispertita: cujus ope cognitâ distantiâ a puncto suspensionis, intervallum invenitur inter penduli locum respectivum ac lineam verticalem, gradibus ejusque partibus expressum.

Penduli probatorii vibrationes conferuntur cum illis horologii oscillatorii, cujus motus diurnus quam exactissime erit investigandus. Priusquam vero oscillationes indagantur, pendulum aeque ac horologium in quietem redigitur, atque ita quidem ut utrumque in eadem linea verticali esse deprehendatur. Horologii lenti discus adaptatur circularis ex charta alba, cujus centrum secatur per penduli filum. Jam ambobus et pendulo horologii et pendulo probatorio motus conciliatur: initio eadem velocitate pendulo probatorio tributa, eundem semper conservaret motum cum horologii pendulo, si quidem ejusdem esset longitudinis; sin vero paulo tantum ab eo differat, ejus reciprocationes statim ab horologii oscillationibus recedunt, et prout pendulum probatorium longius sit breviusve horologii pendulo, brevi temporis spatio elapso prae horologio oscillationes quasdam perdet vel lucrabitur. Quodsi pendulum majori quam horologium praeditum est velocitate, signum horologii lenti adplicatum trans-

---

(1) *Base du système métrique* Tom. 3. Delambre *Astronomie* Tom. 3 pag. 580. Biot *Astronomie physique* Tom. 3. *Add.* pag. 151. Biot et arago *Recueil d'Observations,* Paris 1821. pag. 441. Francoeur *Traité de Mécanique* 1825. pag. 362.

greditur, ita ut post breve temporis intervallum, ad oscillationis extremam partem perveniat, dum horologii pendulum nonnisi lineam verticalem transeat: quo facto semioscillationem lucratum est prae horologio.

Motu dein continuato pendulum una cum signo eodem tempore lineam pertransibit, sed ad oppositam partem oscillationes absolvet: ita horologium prae pendulo unam perdidit vibrationem. Jam utrumque pendulum ad oppositam partem motum persequendo, temporis tandem momentum adveniet, quo signum iterum in eadem linea verticali cum pendulo probatorio adesse deprehenditur, atque utrumque pendulum ad eandem partem oscillationes perficit: quo temporis momento, concursus sive coincidentiae nomine insignito, pendulum probatorium duas oscillationes prae horologio lucratum est, quod momentum observatur ope telescopii ad certam distantiam collocati, atque filo tenuissimo praediti in foco, quod filum in eadem ponitur linea verticali cum signo et pendulo, in quietem redactis. Tempus, quo hic concursus locum habet, horologio indicatur, quocum comparatio instituebatur: simul adscribuntur temperaturae gradus ac barometri altitudo.

Sufficienti numero ejusmodi concursuum observato, pendulo iterum in quietem redacto, planum quoddam chalybeum, invariabili ratione collocatum sub sphaera platinea, cum cujus centro in eadem ponitur linea verticali, — cochlea micrometrica praeditum, ad ejusmodi altitudinem elevatur, donec exacte congruat cum sphaerae parte inferiori.

Quo facto in locum penduli probatorii virga suspenditur metallica, cultro suspensionis praedita, in qua exactissime notatur inferior penduli probatorii extremitas: longitudinem jam hujus virgae, quae simul erit longitudo penduli probatorii, metitur adparatus nomine »comparatoris", ad quem virga metallica adplicatur: cujus jam mensurâ ita exploratâ, reductione pro centro oscillationis aliisque necessariis adhibitis, calculo deducitur longitudo penduli simplicis, singula minuta secunda in vacuo oscillantis.

Methodus Kateri.

6. Principium, quo nititur methodus kateri (1), in eo consistit, quod punctum suspensionis atque centrum oscillationis inter se converti possunt (2), i. e. si corpus suspendatur in centro oscillationis, punctum quod prius erat punctum suspensionis, evadit centrum oscillationis ac vice versa, atque vibrationes in utraque positione aequalibus temporibus absolvuntur. Quodsi igitur primo quaeratur centrum oscillationis tentaminibus, penduloque reverso vibrationes in utraque positione non sunt aequales, haec aequalitas ope ponderis mobilis perfici poterit, atque per se habetur longitudo penduli simplicis absque molesta ad centrum oscillationis reductione, mensurando distantiam inter haec duo puncta, circa quae reciprocationes locum habent, neque haec longitudo obnoxia erit erroribus, ex irregulari corporis densitate alioquin oriundis.

Praefert katerus omnibus aliis ea methodus suspensionis, quae perficitur ope acierum, ex durissimo chalybe constructarum, formam triangularem induentium.

Pendulum ipsum componitur ex virga aurichalci cusi, per quam duae aperturae triangulares penetrant, in quibus acies collocantur. Quatuor frusta angularia, ex aurichalco ducta malleato, bina ad utramque partem, ad angulos rectos ope cochlearum virgae adplicantur, ad quorum planam superficiem acies perfecte allidantur necesse est.

His frustis angularibus ope stilorum atque cochlearum, firmiter inseritur ad utramque partem lamina abietis nigro colore picta, ad cujus finem punctum tenuissimum ex balaena invenitur, ad arcuum amplitudinem indicandam inserviens.

---

(1) *An account of experiments for determining the length of the Pendulum vibrating seconds in the latitude of London*, by *Capt.* kater, in » *Phil. Trans.* 1818. pag. 33.

(2) Hugenii *Horol. oscill.* Part. 4. prop. 20. De theoria Penduli reversionis. Cf. § 1. pag. 37.

Pondus cylindricum ex aurichalco gaudet apertura rectangulari in diametros directione, ubi inserenda sunt frusta angularia: hoc pondus pendulo adaptatur ope styli conici, frusta angularia una cum pondere perforantis. Secundum pondus invenitur ad extremitatem acierum oppositam, duabus cochleis instructum, quibus ad lubitum loco moveri potest. Tertio loco adest pondus cursorium, quod ope cochleae in totam virgae longitudinem transfertur, inservitque ad virgae centrum investigandum: quem in finem ipsa penduli virga instructa est minutissimâ divisione, quâ distantia hujus ponderis a media virga determinatur.

Penduli sustentaculum consistit ex frusto aeris fusi, per cujus dimidiam partem longitudinalis habetur apertura, in qua libere movetur pendulum. Acies incumbunt laminis, ex gagatibus confectis, quae ita in lectulis ad hunc finem accomodatis ponuntur, ut cum metallo in eodem sint plano. Jugamentum ex aurichalco ductum, frusto memorato ope cochlearum adplicatur, quod jugamentum per cochleam, ad superiorem partem adpositam, sursum deorsum moveri potest, ita ut acies, quae ad anteriorem partem collocantur, cum lamellis gagatum in eodem semper plano ponantur. Hoc sustentaculum tabulae, ex ferro fuso constructae, firmiter adponitur.

Ad examinandam stabilem puncti suspensionis positionem, instrumentum inservit ab HARDIO inventum: constat ex filo chalybeo cujus inferior pars, frusto inserta aurichalci, quo sustentatur, ita complanatur, ut momentum sistat tenuissimum. Filo circumvolvitur ponderculum cujus ope tali modo constitui potest instrumentum, ut eodem tempore ac pendulum oscillationes suas perficiat. Quodsi jam penduli sustentaculum, cui hoc instrumentum adplicatur, non satis firmam habet positionem, ejus motus cum filo chalybeo communicatur, quod post breve temporis spatium, penduli vibrationes exaequabit.

Ad lentem penduli horologii adglutinatur frustum chartae nigrae, cui discus adaptatur circularis ex charta alba. Penduli oscillationes una cum arcuum amplitudine investigantur mediante telescopio, ad certam distantiam a pendulo in tripode ligneo collocato.

Comparatio vibrationum penduli cum illis horologii, quemadmodum instituitur in praecedenti methodo, nimirum ope concursuum, ita et hic perficitur: nisi quod tempus coincidentiae locum habere censetur, quando discus circularis albus, modo memoratus, totus quantus tegatur frusto abietis, ad inferiorem penduli partem adplicato: quod telescopii ope facili admodum negotio observatur. In hoc enim telescopio adest diaphragma, cujus latera sibi invicem parallela tangentia sunt ad diametrum horizontalem disci albi: quo facto cum lateribus coincidunt frusti abietis, ita ut utroque pendulo in quietem reducto, nil aliud in telescopio animadvertitur, nisi arcus amplitudinem vibrationum indicans, quem quidem conspicere licet mediante apertura horizontali, hunc in finem ad superiorem diaphragmatis partem adplicata.

7. Distantiâ jam inter acies determinatâ experimenta ipsa sequenti modo sumuntur: pondus cursorium cum ipsius indice ad certam distantiam ponitur a medio pendulo in directionem ponderis majoris, atque minus pondus quinque fere pollices ab aciebus, ad inferiorem partem collocatis. Acies vero ad partem oppositam sitae, aperturis inseruntur triangularibus ipsis destinatis, majoreque pondere ad extremitatem superiorem posito jugamentum submisse deprimitur, usque dum acies ad superficiem gagatum positae evadunt. Tum telescopio ordinato pendulum movetur; talismodi quidem motus illi est impertiendus, ut non superet velocitatem penduli horologio adaptati. Adnotatur dein temporis momentum, minutis primis atque secundis expressum, quo disparet discus albus in telescopio, simulque adscribuntur thermometri gradus atque barometri altitudo. Quo facto ex certo numero observationum, calculo computatur numerus medius oscillationum, quem pendulum absolvit in certo temporis spatio, ad temperaturam et aëris pressionem indicatam.

Quibus peractis jugamento elevato pendulum invertitur, majorique pondere ad inferiorem extremitatem collocato, observatio denuo eodem modo ac prior instituitur. Quodsi jam vibrationum numerus, ad eandem temperaturam ac prioris reductus, ab illo differt, quem pendulum in priori positione absolvebat, pondus secundum loco movetur, atque numero vibrationum iterum determinato pendulum rursus invertitur, atque sic iteratis iteratisque vicibus observatio instituitur, donec in utraque positione pendulum eundem, quoad ejus fieri possit, oscillationum numerum perficiat.

Datur in utraque penduli positione punctum singulare, ubi effectus, quem pondus cursorium habet in vibrationum numerum augendum, est maximum, quod nimirum in eo loco invenitur, ubi dimidia penduli simplicis longitudo deprehenditur (1). Propter haec duo puncta ponderis cursorii motus vix assignabilem producit effectum, in mutandum vibrationum numerum: qui effectus tum demum percipitur, quando pondus cursorium prope ad maximum oppositae collocatur positionis. Quandoquidem vero in utraque positione hoc punctum maximi distat 0,4 poll. fere a medio pendulo, distantia inter haec duo puncta respectiva aequat 0,8 poll.; quodsi igitur pondus cursorium primo loco 1,5 poll. a medio pendulo in directionem ponderis majoris collocetur, ut augeatur numerus oscillationum 1 poll. fere propius ad medium est ponendum, atque verus vibrationum numerus invenietur, quando intra duas hasce positiones priores adaptetur.

Quo facto, si numerus reciprocationum adhuc excedit numerum in positione penduli inversa, verus sane erit inter primam et tertiam ponderis positionem. Atque sic continuo bipartiendo hanc distantiam, numerus oscillationum, posito majori pondere ad extremitatem inferiorem, celerrime vero adpropinquatur.

Quibus peractis series incipitur observationum, quâ numerus cognoscitur vibrationum penduli, distantiae inter acies aequalis, pro certo temporis spatio atque circumstantiis quibus versatur aëris pressio atque temperatura: unde facili calculo numerus oscillationum invenitur, quem idem pendulum in die solari medio absolvit, indeque longitudo penduli simplicis in loco observationis.

Tali modo KATERUS absolutam penduli simplicis longitudinem Londini determinavit in aedibus BROWNII ad Portlandplace.

Qui dein ipsius methodi secuti sunt in variis terrae regionibus, illis non opus

---

(1) Cf. HUGENII *Horol. oscill.* Part. 4 prop. 23.

erat distantiâ inter acies determinatâ, si quidem haec eadem immutataque semper maneret. Etenim dummodo penduli, eadem ratione constructi, primum Londini, dein in quacunque alia regione vibrationum numerus indagetur, ibi quoque ex relatione inter longitudines duorum pendulorum illorumque numerum vibrationum, absoluta invenitur penduli simplicis longitudo, si quidem haec iterum idonea ratione conjungatur cum longitudine penduli simplicis Londini observata.

In persequenda vero hac methodo, quemcunque alium locum tanquam normalem assumi posse, dummodo hic iterum absoluta determinetur penduli simplicis longitudo, scrupula singula secunda oscillantis, non est quod moneamus.

Methodus BESSELII.

8. Ad penduli simplicis longitudinem determinandam BESSELIUS ejusmodi adhibet agendi rationem, ut duorum observet pendulorum probatoriorum oscillationes, quorum differentia non mensuretur, sed alicui mensurae cognitae (hexapedae sc. Peruensi) aequalis reddatur (1).

Quem in finem inservit virga ferrea, cui adplicatur cylinder perpendicularis, ex chalybe ductus, cujus extremitates formam induunt coni: cum inferiori parte extrema in adminiculo quiescit hic cylinder, virgae firmiter adhaerenti: pars vero superior perpendiculariter in cylindri axin abscissa, planum format in virgam ferream normale.

In hoc cylindri plano ponitur hexapeda, quae sustentatur ope pennarum tenuium; ut vero nulla in hexapedae dimensionibus locum habeat mutatio, in ejus media adest adparatus, quem duo vectes mobiles adprehendunt, ad utramque partem praediti ponderibus ita conformatis, ut exacte hexapedae pondus compensent.

---

(1) BESSEL *Untersuchungen über die länge des einfachen Sekundenpendels.* Berlin 1828. pag. 3 seqq.

Hexapeda igitur libere pendet, neque fixam in cylindro acquirit positionem, nisi quod adhibendo longiore pendulo obtinet superpondium hac ex causa oriundum, quod adparatus, quo suspenditur, in parte quiescit superiori.

Ad dextram virgae ferreae, cum ad superiorem, tum ad inferiorem hexapedae extremitatem, subicula adsunt, in quibus cylindri chalybis temperati normaliter in perticam ferream collocantur. Jugamentum suspensionis, ex ferro compositum, inversis praeditum subiculis, in utriusque penduli positione in cylindris collocatur. Sub illius extremitate, subiculis opposita, cylinder sustinetur chalybeus, ad eam partem extremam, qua vergit in virgam ferream, duobus instructus sphaerae segmentis; ad extremitatem autem anteriorem minore gaudet cylindro devolventi.

Filum penduli firmiter cohaeretur ad frustum, quod in jugamento suspensionis oblique sursum vertitur, dein cylindro devolventi trajecto per sphaeram comprimitur.

In experimentis sumendis libellâ aëreâ horizontalis investigatur positio cylindrorum in subiculis: quo facto axis cylindri devolventis horizontalem quoque adipiscitur positionem: unde patet differentiam inter longitudinem amborum pendulorum aequare longitudinem hexapedae cum temperatura experimenti congruentem.

Differentia inter altitudinem sphaerae in utriusque penduli positione invenitur ope cochleae micrometricae, ad inferiorem adparatus partem adplicatae.

Adparatus thecae includitur ex vitro polito compositae, ut omnes fortuitae evitentur temperaturae mutationes. Thecâ occlusâ movetur et sustinetur pendulum atque etiam motus impertitur cochleae micrometricae. Amplitudinem oscillationis demetitur scala minutissimâ praedita divisione. 3 thermometra virgae ferreae inseruntur: duo alia libere pendent in theca indicantque aëris temperaturam.

Ad investigandam jugamenti suspensionis immobilitatem, instrumentum inservit ab HARDIO inventum, quod jam KATERUM eodem scopo adhibuisse supra memoravimus: eventus totius adparatus stabilem demonstravit positionem, quae ut immediate adhuc possit investigari, penduli oscillationes prae se ferebant, primum jugamento ope filorum, adprime contentorum, quam firmissime constricto: dein vero jugamento filis soluto; in neutra autem jugamenti collocatione vel minima detecta est differentia.

Filum chalybeum, quo suspenditur sphaera, non immediate in contactu est cum cylindro devolventi, sed ad jugamentum suspensionis lamellâ adstringitur, ex aurichalco ductâ, cylindro devolventi superimpositâ, cui ad distantiam linearum aliquot retinaculum adplicatur. Penduli filum ad utramque partem in fibulis retinetur, cochlearum ad instar conformatis, quoad pondus perfecte aequalibus, quarum altera retinaculo, matrice praedito, altera vero ad matricem in sphaera terebratam inseritur: qua dispositione facili negotio filum invertitur. Tandem cylindrus ex aurichalco ductus, in axe perforatus, eo pacto filo adplicatur, ut observatio oscillationum exacte instituatur: qua de causa cylinder nuncupatur coincidentiae.

Ut quicumque mutuus evitetur effectus, quem habere possit pendulum horologii oscillatorii atque pendulum adparatus in se invicem, horologium ad distantiam sufficientem a pendulo ponitur: inter utrumque collocatur perspicillum cometarium 24,36 poll. focus, e quo ocularia tolluntur; ejus lens objectiva talem servat inter utrumque pendulum distantiam, ut imago penduli probatorii exacte cadat in pendulum horologii, et utrumque ope telescopii, ad distantiam 15 pedum positi, distincte adpareat.

In scala adparatus penduli, qua indicatur oscillationum amplitudo, taenia adest atro picta colore, in cujus medio locus invenitur albus ejusmodi dimensionis, ut a penduli quiescentis filo accurate bissecetur, atque a cylindro coincidentiae contegatur. Ad imam penduli horologii partem frustum invenitur chartae nigro colore pictae, apertura praeditae, quae pendulo horologii quiescente, exacte congruit cum imagine loci albi, in linea nigra existentis.

Quodsi vero utrique pendulo motus impertiatur, locus albus in quaque horologii oscillatione adparet, excepto eo temporis momento, quo utrumque simul illum attingat, ideoque cylinder coincidentiae illum contegat.

Hoc temporis momentum in utroque pendulo separatim est observandum, adscriptis simul aëris pressione, aëris atque hexapedae temperaturâ. Ex sufficienti coincidentiarum numero penduli longioris computatur tempus oscillationis, indeque correspondens deducitur longitudo penduli simplicis. Interim distantiâ sphaerae partis inferioris investigatâ mediante cochleâ micrometricâ, quaesita habetur longitudo penduli simplicis minuta secunda oscillantis, atque longitudo hexapedae pro temperatura observationis, in summam collecta: atque ab altera parte correspondens longitudo penduli longioris probatorii: illarum differentia erit absoluta penduli simplicis longitudo singula minuta secunda oscillantis. Quod brevius attinet pendulum, ex ejus tempore oscillationis per coincidentias cognito, deducitur longitudo quam haberet, si pendulum simplex fuisset: cui si additur distantia sphaerae a plano invariabili, fluit iterum penduli simplicis minuta secunda oscillantis longitudo. Unde tot proveniunt aequationes, quot binae institutae fuere observationes, ex quarum medio tandem absoluta concluditur, pro loco observationis, longitudo penduli mathematici.

Correctiones et Reductiones omnibus experimentis adplicandae, ut cum inter se, tum cum aliis possint comparari.

Ut penduli oscillationes, quales methodis expositis acquiruntur, tam inter se quam cum aliis possint comparari, necesse est omnes omnium pendulorum oscillationes esse isochronas sive saltem ad tautochronismum reducantur: porro ut ad easdem referantur circumstantias physicas. Correctiones atque reductiones itaque ipsis sunt adplicandae sequentes:

1. *Correctio amplitudinis.*

9. Tempus unius oscillationis in arcu circulari α_1, neglectis terminis ulterioribus, exprimi vidimus (pag. 32) hac formula

$$T = \pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 \right\}$$

Quodsi igitur n significat numerum oscillationum quae in tempore T_n absolvuntur, erit eodem modo

$$T_n = n \pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} . \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1 \right\}$$

In eodem tempore idem pendulum n' oscillationes cycloidales perficit, ita ut habeatur

$$T_n = n' \pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Comparatis hisce inter se ipsius T_n valoribus prodit

$$n' = n \left(1 + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \alpha_1\right) \ldots . (1)$$

qua quidem formula omnes vibrationes ad cycloidales reduci possent, modo amplitudo eadem semper maneret; haec autem amplitudo aëris renisu atque frictione sensim sensimque diminuitur, ita ut post certum vibrationum numerum hic arcus loco α_1 fiat α_n: unde manifeste efficitur, cuicunque oscillationi per se alia opus esse correctione.

Quodsi vero experientia parvum admodum amplectitur temporis intervallum, arcus α_n parva etiam differet ab arcu α_1 quantitate, ita ut poni possit, pendulum mediam inter utramque habuisse amplitudinem: quo posito reductio ad amplitudines cycloidales exprimitur per formulam

$$n' = n \left[1 + \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}^2 \frac{(\frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_n)}{2} \right] \ldots . (2)$$

Sin vero, experimentis per longum tempus protractis, accuratior sit correctio, necesse est reductio ea nitatur lege, secundum quam experientia duce diminutio arcuum oscillationis progressionem sequitur geometricam, dum temporis intervalla arithmetica increscant ratione.

Itaque, significante e exponens progressionis geometricae, erit correctio amplitudinis pro n oscillationibus

$$C = \frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}\alpha_1}{4}(1 + e + e^2 + \ldots\ldots e^{n-1})$$

sive si per $\frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_n$ correctionem ultimae oscillationis indices

$$C = \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_1 - \operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_n}{1 - e}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_n$$

Jam vero ex lege supposita ultima oscillatio ejusmodi est primae functio, ut sit

$$\log e = \frac{2}{n - 1}(\log \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha_n - \log \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha_1)$$

unde, si cognitae seriei pro evolutione quantitatis in ejus logarithmum

$$e = 1 + M\log e + \frac{M^2 \log^2 e}{1.2} + \frac{M^3 \log^3 e}{1.2.3} + \ldots$$

in qua M denotat modulum logarithmorum naturalium, — duo tantummodo priores retinentur termini, quod propter parvam differentiam, quae inter arcuum primam et ultimam existit oscillationem sine erroris periculo fieri potest, elicitur

$$1 - e = \frac{2M}{n - 1}(\log \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha_1 - \log \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha_n)$$

quo valore in superiorem ipsius C expressionem surrogato provenit

$$C = \frac{(n - 1)(\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_1 - \operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_n)}{8M(\log \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha_1 - \log \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha_n)} + \frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_n$$

Terminus $\frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}\alpha_n$ correctionem continet, quae adplicanda est ad ultimam sive n^{tam} oscillationem, ita ut primus membri secundi terminus indicet correctionem, quae ad $n - 1$ oscillationes pertineat ultimo antecedentes. Ut igitur hicce terminus ultimae quoque oscillationis in se contineat correctionem, loco $n - 1$ ponatur n: quod propter exiguam differentiam inde forte oriundam tuto fieri potest: quo facto prodit correctio amplitudinis pro n oscillationibus (1)

(1) Borda *Base du système métrique* Tom. 3. Cff. Biot *Astron. Physique* Tom. 3. *Add.* pag. 154. 172. *Conn. des Tems* 1826. pag. 286; 1827. pag. 394. Bohnenberger l. l. pag. 33.

Katerus (*Phil. Trans.* 1818. pag. 46) in observationibus suis formulam (2) adhibet aliquomodo modificatam: ejus enim correctio continetur formulâ $C = \delta\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}\right)^2$, posito tempus oscillationis in arcubus exiguae amplitudinis crescere uti quadrata arcuum. In hac

$$C = \frac{n \operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_n)}{8M(\log \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha_1 - \log \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha_n)} \ldots. (3)$$

2. *Correctio pro dilatatione penduli.*

10. Experimenta in eisdem locis instituta, plerumque concluduntur ex medio inter diversas observationes: quapropter si inter se et cum aliis comparabiles reddantur, necesse est eodem temperaturae gradu instituantur, sive saltem ad eandem temperaturam normalem referantur.

Sit l longitudo penduli ad temperaturam normalem, n numerus oscillationum ipsi respondens, l_τ longitudo penduli ad quamlibet aliam temperaturam, atque n' numerus oscillationum quem idem pendulum ad hanc temperaturam perficit: porro ponamus δ esse dilatationem penduli pro 1° qualiscunque thermometri, ita ut dilatatio pro temperatura τ graduum sit $\delta\tau$: quo posito habetur longitudo penduli ad quamlibet temperaturam

$$l_\tau = l(1 \pm \delta\tau) \ldots. (1)$$

Jam numerus oscillationum cycloidalium, quem idem pendulum duabus hisce

formula δ significat differentiam quae existit inter numerum oscillationum, quem pendulum probatorium absolvit in 24^h, in cycloide atque in arcu circulari 1° complectenti. Haec differentia pro quocunque pendulo probatorio et loco variabilis (in experimentis in *Phil. Trans.* 1818 memoratis, $= 1{,}635$) invenienda est ex form. (2), si oscillationes, quas pendulum certa amplitudine alsolvit, ad illas reducas, quas in arcu 1° oscillando perfecisset. Quandoquidem omnes ejusmodi formulas empiricas non ita ferme ratas habemus, illam quoque, priusquam conclusiones inde ductas veritati consentaneas existimarimus, cum form. 3 comparare placuit. Quo facto patuit, illam scopo proposito inservire posse, si quidem ex summa correctionum pro quoque coincidentiarum intervallo applicandarum, sumatur medium.

Sabinius l. l. pag. 16 adhibet formulam wattsii, in diario *Edinburg Phil. Journal* n°. 2 art. 17 demonstratam

$$C = \frac{n(\alpha_1 + \alpha_n)(\alpha_1 - \alpha_n)}{241886.08(\log \alpha_1 - \log \alpha_n)}$$

quae ad eundem ac form. 3. accurationis gradum perducit.

circumstantiis eodem tempore absolvit, per duas exprimitur aequationes diversas sibi invicem analogas, sc.

$$T_n = n\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ atque } T_n = n'\pi\left(\frac{l_\tau}{g}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ unde}$$

$$n = n'\left(\frac{l_\tau}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Quodsi in hanc aequationem substituamus valorem ipsius l_τ ex aequatione (1) prodit (1)

$$n = n'(1 \pm \delta\tau)^{\frac{1}{2}} = n'(1 \pm \tfrac{1}{2}\delta\tau \mp \tfrac{1}{8}\delta^2\tau^2 \pm \text{cet}) \ldots . (2)$$

qua quidem formulâ numerus oscillationum, quem pendulum ad temperaturam quandam normalem absolvit, functione exprimitur dilatationis penduli, atque numeri oscillationum ad quamlibet aliam observati temperaturam.

3. *Reductio ad vacuum.*

11. Comparatio oscillationum ejusdem sive diversorum pendulorum inter se, nititur ea suppositione, quâ omnia pendula vibrationes suas perficiant in spatio ab aëre vacuo: requiritur igitur reductio ad hoc spatium inde necessaria, propterea quod experimenta plerumque sumuntur in fluido atmosphaerico, in penduli motum vim suam exserenti.

Formula (6) pag. 30 integrata praebet expressionem penduli motus in vacuo

$$\text{Const.} = m(a^2 + k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\pi^2 \, lma \, \text{Cos}\,\theta$$

Quodsi vero pendulum in fluido movetur, qualis est aër atmosphaericus, hoc quoque ad systema motum pertinet; unde manifeste efficitur, omnes aequationis terminos mutationem quandam subire. Primo enim penduli percussio contra alias atque alias fluidi partes in quoque spatii puncto, per quod movetur, jacturam producit potentiae vivae totius systematis, ideoque diminutionem ipsius C, a velocitate et figura penduli externa dependentem, quam per $\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ denote-

(1) Biot l. l. pag. 179. Kater *Phil. Trans.* 1818 pag. 61; *Conn. des Tems* 1826 pag. 288.

mus: unde diminutio ipsius C durante tempore dt erit $d\theta\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$: igitur ipsa C tempore finito elapso mutatur in $C - \int d\theta\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$. Tum secundo termino addenda est summa omnium fluidi particularum, quaeque in quadratum velocitatis multiplicata, sive $\int v^2 dm'$, significante m' fluidi massam. Tertio tandem termino adjungatur necesse est summa productorum pressionis, in directionem gravitatis resolutae, ducta in distantiam a plano horizontali axin rotatorium transeunti, sive $2\pi^2 la'm'$. $\text{Cos}\,\theta$, ubi a' distantiam centri gravitatis figurae penduli exteriore ab axe designat.

Quo facto habetur aequatio motus penduli in fluido

$$C - \int d\theta\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = m(a^2 + k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \int v^2 dm' - 2\pi^2 l(am - a'm')\,\text{Cos}\,\theta$$

Quandoquidem $\int d\theta\phi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ fluidi exhibet renisum, quem pro arcubus infinite parvis tempus oscillationis haud mutare vidimus (pag. 34), aequationis solutio dependet ab integrali $\int v^2 dm'$. Quaecunque sit hujus integralis forma, assumi semper licet, ipsius valorem respectu temporis t redire post duas oscillationes peractas: quod tum locum habere oportet, quando motus initialis conditiones renisu evanuerint, atque systema statum adsumserit permanentem. Quodsi jam tempus oscillationis ejusmodi est, in quali angulus nt crescit 180°, quadratum velocitatis fluidi in quocunque spatii puncto expressionem adipiscitur, quae valorem suum recuperat, quando nt crescit 360°. Ponamus hanc expressionem induere formam

$$\theta'^2 n^2\left\{d_0 + d_1\,\text{Cos}\,(nt + \zeta_1) + d_2\,\text{Cos}\,(2nt + \zeta_2) + \text{cet}\right\}$$

ubi θ' penduli significat amplitudinem, cujus functiones sunt d_0, $d_1, \ldots .$, ζ_1, $\zeta_2 \ldots .$; integralis igitur $\int v^2 dm'$ in totum extensa spatium fluido impletum, gaudet formâ

$$m'\theta'n^2\left\{b_0 + b_1\,\text{Cos}\,(nt + \beta_1) + b_2\,\text{Cos}\,(2nt + \beta_2) + \text{cet}\right\}$$

ubi b_0, $b_1, \ldots .$, β_1, $\beta_2, \ldots .$, a figura atque ab arcu oscillationis dependent. Quodsi vero pendulum ab utraque parte ejusmodi assumit similitudinem, ut utroque commotum eandem fluido offerat superficiem, posteaquam nt gradibus 180 accrevit, $\int v^2 dm'$ eundem recuperavit valorem: quo in casu membra, ab nt, 3nt, 5nt etc. dependentia evanescunt, ita ut eruatur

$$\int v^2 dm' = m'\theta'^2 n^2 \left\{b_0 + b_2 \operatorname{Cos}(2nt + \beta_2) + b_4 \operatorname{Cos}(4nt + \beta_4) + \text{cet}\right\}$$

Posito jam $\frac{m'}{m}$ ejusmodi esse quantitatem, cujus secunda altioresque potentiae negligi possunt, hujus expressionis effectus in oscillationum extensionem evanescit, in longitudinem contra penduli simplicis (1) ejusmodi est, ut longitudo penduli simplicis in vacuo cum composito in fluido sese moventi isochroni, fiat

$$l = \frac{a^2 + k^2 + \frac{2m'}{m}\left\{b_2 \operatorname{Cos}\beta_2 - 2b_4\beta_4 + 3b_6\beta_6 - \text{cet}\right\}}{a\left(1 - \frac{a'm'}{am}\right)} = \frac{a^2 + k^2 + \frac{m'}{m} Q}{a\left(1 - \frac{a'm'}{am}\right)}$$

unde ponendo $Q = \mu(a^2 + k^2)$, atque pendulum ex omni parte esse homogeneum, colligitur

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a - \frac{m'}{m} a}\left(1 + \frac{m'}{m}\mu\right)$$

Quantitas vero $\frac{m'}{m}$ cujus conditionem non nisi generaliter indagavimus, non eadem semper manet, sed variabilis est in ratione inversa expansionis, atque in directa ratione aëris pressionis, ita ut, in universum significante Θ quemcunque atmosphaerae statum, fiat

$$\Theta = \frac{m'}{m}\left\{\frac{\dfrac{p' - \frac{3}{8}V(1 + \delta\tau')}{1 + \delta\tau}}{p(1 + \delta\tau)}\right\}$$

in qua p denotat pressionem aëris, sive barometri altitudinem normalem, ad quam aëris densitas cognita esse censetur, cum temperatura normali congruentem; p′ vero barometri altitudinem, τ temperaturam tempore observationis:

(1) Cf. BESSEL l. l. pag. 36. 129.

δ dilatationem aëris pro quoque gradu qualiscunque thermometri: V tensionem aquae vaporum atmosphaerâ contentorum: τ' temperaturam qua roris praecipitatio indicatur in hygrometro Danielis. Quod autem attinet partem coëfficientis ipsius $\frac{m'}{m}$, cujus causa sunt aquae vapores, in aëre praesentes, illam, etiamsi aëris sumatur status, qui maximam vel minimam vaporum contineat quantitatem, in obervationes ipsas nullam producere mutationem calculo subducto nobis persuasimus (1): ideo sine erroris periculo contemni potest. Quo facto, designante t tempus oscillationis, n numerum vibrationum, atque l longitudinem penduli simplicis in vacuo: t′, n′, l′ respective easdem penduli functiones in aëre atmosphaerico, sequentes proveniunt formulae quarum ope reductio ad vacuum erit instituenda:

$$t = t'\left\{1 - \frac{m'}{2m}\left(\frac{p'}{p[1 + \delta\tau]}\right)(1 + \mu)\right\} \ldots . (1)$$

$$n = n'\left\{1 + \frac{m'}{2m}\left(\frac{p'}{p[1 + \delta\tau]}\right)(1 + \mu)\right\} \ldots . (2)$$

$$l = l'\left\{1 + \frac{m'}{m}\left(\frac{p'}{p[1 + \delta\tau]}\right)(1 + \mu)\right\} \ldots . (3)$$

4. *Reductio ad maris libellam.*

12. Ultimo loco memoranda est reductio ad maris libellam, omnibus circa penduli longitudinem experimentis adplicanda.

Sit l longitudo penduli simplicis in vacuo, g gravitatis actio ad maris libellam, ad distantiam r a centro telluris; l′ vero longitudo ejusdem penduli in regione, ubi observatio instituitur, cujus altitudo supra maris libella sit $=$ a, ibique

(1) Quae quamvis ita sint, theoretice tamen rem consideranti patebit, majoris minorisve vaporum quantitatis in aëre praesentiam, aliquam saltem in aëris densitatem vim habere atque efficaciam: qua de causa omnino mirum videtur, nullibi quantum scimus, mentionem fieri de hac in penduli longitudinem, ad vacuum reducendam, adplicanda quantitate, ab aëris statu hygrometrico dependenti.

gravitas per g' exprimatur: unde longitudo ad maris libellam continetur expressione $l = \frac{l'g}{g'}$. Sunt vero gravitatis actiones in ratione inversa distantiarum quadratarum, ad quas respective pertinent, ita ut eruatur nostro in casu

$$g : g' = (r + a)^2 : r^2$$

quo valore ipsius $g : g'$ in aequationem priorem substituto prodit

$$l = l'\left(\frac{r + a}{r}\right)^2 = l'\left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r}\right) \ldots . (1)$$

Quodsi vero reductio ad numerum oscillationum penduli adplicato oportet, obtinetur

$$n = n'\left(1 + \frac{a}{r}\right) \ldots . (2)$$

ubi n significat penduli vibrationum numerum ad maris libellam, n' vero eundem numerum ad regionem, a maris libella ad distantiam a remotam.

Caput Tertium.

PENDULI ADPLICATIO AD TELLURIS FIGURAM.

1. Ex illis, quae in capite antecedenti disputata habentur, rationem quandam constat existere inter penduli simplicis longitudinem gravitatisque actionem in superficie telluris: ipsa vero gravitas denuo a terrae constitutione generali necessario dependet: videamus igitur, quamnam haec sistat figurae telluris functionem, ut inde ratione habita experimentorum, circa penduli longitudinem institutorum, ipsam telluris figuram determinemus.

Quem in finem aequilibrium investigemus massae fluidae corpus contegentis, compositum ex stratis densitate variabili praeditis, motu gaudens circa axin rotatorio, atque corporum exteriorum sollicitatum attractione.

Quodsi x, y, z sunt coördinati puncti fluidi cujusdam, in aequilibrio persistentis, X, Y, Z vero potentiae fluido adplicatae, ad superficiem, cujus densitas est constans, erit aequatio (1) aequilibrii

$$0 = Xdx + Ydy + Zdz \ldots . (1)$$

atque aequilibrium nullo alio pacto locum habere potest (2), nisi si $Xdx + Ydy + Zdz$ sit differentialis integra alicujus functionis Q trium variabilium. Aequatione (1) igitur ad integrationem perducta prodit

$$\text{Const} = Q \ldots . (2)$$

(1) *Mécanique céleste* Tom. 1 pag. 49. *Méc. anal.* Tom. 1 pag. 185. Poisson *Traité de Mécanique* Tom. 2 pag. 324.

(2) *Mécanique céleste* Tom. 2 pag. 64.

Quodsi hoc ad tellurem adplicamus, ita ut initium coördinatorum in terrae centro sumatur, x vero significet axin, T tempus revolutionis, praeter attractionem nulla alia potentia in censum venit, nisi vis centrifuga, quae in tres potentias resoluta, in directionem ipsarum x evanescit, secundum directionem y erit $\frac{4\pi^2}{T^2}y$, in directione ipsius z sistit quantitatem $\frac{4\pi^2}{T^2}z$. Ipsi Q igitur hac ex causa addatur necesse est terminus $\frac{2\pi^2}{T^2}(y^2+z^2)=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3\pi}{2T^2}r'^2(1-\mu^2)$, ubi r′ significat distantiam moleculae attractae a centro, μ vero Cosinum anguli quem radius r′ cum axe ipsius x constituit. Quod attinet attractionem, actione corporum exteriorum productam, quando dM est molecula attrahens, cujus coördinati sunt x′, y′, z′, ejus attractio (1) in directionem ipsius x erit $\frac{(x'-x)\,dM}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$, similesque proveniunt expressiones pro attractionibus in reliquos axes coördinatorum; itaque attractio unius particulae ipsi Q tribuit terminum $\frac{dM}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{1}{2}}}$: unde sequitur terminum ipsi Q addendum, ab attractione omnium corporum exteriorum originem ducentem, aequare summam omnium molecularum divisam per respectivam a particula attracta distantiam (2). Ponamus hunc terminum exprimi per V: itaque habetur

$$Q=V+\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3\pi}{2T^2}r'^2(1-\mu^2)\ldots.(3)$$

Valorem ipsius V jam determinari oportet.

2. Sit a semiaxis polaris sphaeroidis ellipticae, cujus axis aequatoris dimidiata aequat $a(1+e)$, μ' vero Sinus latitudinis puncti cujusdam, r radius cum hoc puncto conveniens, erit $r=a\left[1+e(1-\mu'^2)-\frac{3e^2}{2}(\mu'^2-\mu'^4)\right]$

Radius igitur superficiei densitatis constantis, dignitatibus ipsius e secundam

(1) *Mec. cel.* Tom. 2 pag. 13. (2) *ibid.* pag. 65.

excedentibus neglectis, aequalis erit $a\left[1+e(1-\mu'^2)-\frac{3e^2}{2}(\mu'^2-\mu'^4)\right]$ addita quantitate secundi ordinis. Jam vero adhibendo ipsius r valore elliptico, aequilibrii adparet aequationi satisfieri non posse ob praesentem μ'^4: neque tamen hanc aequationem ulteriores involvere ipsius μ' dignitates.

Aptissima igitur forma, huic quantitati secundi ordinis impertienda, erit $aA(\mu'^4-\mu'^2)$, propterea quod aeque ad aequatorem atque ad polum evanescit, in mediis vero latitudinibus superficiei exprimit depressionem infra ellipsoidem, aequalibus gaudentem axibus. Erit itaque in superficie sphaeroidali densitatis constantis

$$r=a\left[1+e(1-\mu'^2)-\left(\frac{3e^2}{2}+A\right)(\mu'^2-\mu'^4)\right]$$

Sit porro r′ alius puncti distantia a centro, μ ejus Sinus latitudinis, θ ipsius latitudo, ω longitudo; prioris vero puncti latitudinem per θ', longitudinem per ω' denotemus: unde utriusque puncti ab invicem distantiam per z designante, eruitur (1)

$$\begin{aligned} z &= \{r^2-2rr'[\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\cos(\omega'-\omega)]+r'^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{r^2-2rr'[\mu\mu'+(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}}\cos(\omega'-\omega)]+r'^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Significante jam ρ densitatem sphaeroidis heterogeneae, V in hac sphaeroide reperietur integrando $\rho\frac{r^2}{z}\frac{dr}{da}$ respectu quantitatum a, ω' atque μ', sive sumendo integrandum $\iiint\rho\frac{r^2}{z}\frac{dr}{da}\cdot da\,d\omega'\,d\mu'$ inter limites congruos: qui sunt pro μ', -1 atque $+1$: pro ω' vero 0 atque 2π, atque pro a, a centro ad superficiem usque 0 atque α, si α denotat valorem ipsius a in superficie sphaeroidis exteriori.

Ut integratio indicata possit institui, sit

$$\frac{1}{z}=\frac{U_0}{r'}+\frac{U_1 r}{r'^2}+\frac{U_2 r^2}{r'^3}+\frac{U_3 r^3}{r'^4}+\text{ cet. pro stratis interioribus, atque}$$

(1) *Mec. cel.* Tom. 2 pag. 67.

$\frac{1}{z} = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1 r'}{r^2} + \frac{U_2 r'^2}{r^3} + \frac{U_3 r'^3}{r^4} + \ldots$ pro stratis exterioribus. Quo posito U_1 satisfacit aequationi (1)

$$0 = \frac{d}{d\mu} \cdot \left\{(1-\mu^2)\frac{dU_1}{d\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2} \cdot \frac{d^2U_1}{d\omega^2} + m(m+1)U_1$$

valorque ipsius V dependet pro stratis interioribus ab integrando

$$\frac{1}{r'^{m+1}} \iiint \rho\, U_m r^{m+2} \frac{dr}{da} da.d\omega'.d\mu', \text{atque ab integrando } r'^m \iiint \rho \frac{U_m}{r^{m-1}} \frac{dr}{da} da.d\omega'.d\mu',$$

pro stratis exterioribus, in quibus m successive = 0, 1, 2, 3 etc.

Evolvatur jam r^{m+3} in seriem formae $b_0 z'_0 + b_1 z'_1 + b_2 z'_2 +$ etc. ubi $b_0, b_1 \ldots.$ sunt functiones ipsius a, atque z'_k functio ipsius μ' quae satis facit aequationi

$$0 = \frac{d}{d\mu'} \cdot \left\{(1-\mu'^2)\frac{dz'_k}{d\mu'}\right\} + k(k+1)z_k$$

Erit igitur

$$r^{m+2}\frac{dr}{da} = \frac{1}{m+3}\frac{dr^{m+3}}{da} = \frac{1}{m+3}\frac{d}{da} \cdot (b_0 z'_0 + b_1 z'_1 + b_2 z'_2 + \text{cet} \ldots\ldots)$$

ita ut V pro stratis interioribus summam aequet omnium quantitatum

$$\frac{1}{(m+3)\, r'^{1+m}} \int \rho da \frac{db_k}{da} \iint U_m z'_k d\omega' d\mu'$$

si m atque k successive ponantur = 0, 1, 2, 3 etc. atque integralia respectu ipsius a sumantur ab a = 0 usque ad a = η, significante η valorem ipsius a in strato densitatis constantis, punctum datum transeunti; pro stratis vero exterioribus summam valorum $r'^m \int \rho\, da \iint \frac{U_m}{r^{m-1}} \frac{dr}{da} d\omega' . d\mu'$.

Jam vero $\frac{1}{r^{m-1}}\frac{dr}{da} = \frac{1}{2-m}\frac{d}{da} \cdot \frac{1}{r^{m-2}}$, excepto casu ubi m = 2, quo sc.

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{da} = d \cdot \frac{\log r}{da}$$

(1) *Mec. cel.* Tom. 2 pag. 25.

Evolvendo r^{2-m} in seriem $\beta_0 \zeta'_0 + \beta_1 \zeta'_1 + \beta_2 \zeta'_2 +$ etc., ad valorem ipsius V obtinendum sumenda est súmma omnium quantitatum

$$\frac{r'^m}{2-m} \int \rho\, da \frac{d\beta_k}{da} \iint U_m \zeta'_k d\omega' d\mu', \text{ quando } k = 0, 1, 2, 3\ldots. \text{ atque } m = 0, 1, 3, 4\ldots.$$

Pro m = 2, log r evolvatur necesse est in seriem $c_0 y'_0 + c_1 y'_1 + c_2 y'_2 +$ etc. atque sumenda summa quantitatum $r'^2 \int \rho\, da \frac{dc_k}{da} \iint U_2 y'_k d\omega' d\mu'$: hoc vero in casu respectu ipsius a integralis sumendae sunt ab a = η usque ad a = α.

Jam vero $\iint U_m z'_k d\omega' d\mu'$ inter limites $\mu' = -1$ atque $\mu' = +1$, atque ab $\omega' = 0$ usque ad $\omega' = 2\pi$ semper evanescit, excepto casu quo k = m: atque $Q_m = \frac{4\alpha'\pi}{2m+1} a^{m+3} Y_1$; sed inter eosdem limites $Q_m = \alpha' a^{m+3} U_m Y'_m d\omega' d\mu'$: erit igitur $\iint U_m Y'_m d\omega' d\mu' = \frac{4\pi}{2m+1} Y_1$, ubi Y'_m functio est ipsius μ' atque ω', aequationi satisfaciens

$$0 = \frac{d.}{d\mu'}\left\{(1-\mu'^2)\frac{d.\, Y'_m}{d\mu'}\right\} + \frac{1}{1-\mu'^2} \cdot \frac{d^2 Y'_m}{d\omega'^2} + m(m+1) Y'_m$$

Itaque

$$\iint U_1 z'_m d\omega' d\mu' = \frac{4\pi}{2m+1} Z_m$$

$$\iint U_1 \zeta'_m d\omega' d\mu' = \frac{4\pi}{2m+1} z_m$$

$$\iint U_2 y'_2 d\omega' d\mu' = \frac{4\pi}{5} y_2$$

ubi Z_m, z_m atque y_2 sunt valores ipsarum z'_m, ζ'_m atque y'_2 quando μ' transit in μ.

3. Pro partibus igitur sphaeroidis interioribus habetur, si m = 0

$$r^3 = a^3 \left\{1 + 3e(1-\mu'^2) + 3e^2(1-\mu'^2)^2 - \left(3A + \frac{9e^2}{2}\right)(\mu'^2 - \mu'^4)\right\}$$

Quandoquidem vero z'_m, si ab ω' non dependet, multiplex est quantitatis

$$\mu'^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)} \cdot \mu'^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4(2m-1)(2m-3)} \mu'^{m-4} - \text{etc.}$$

r resolvatur oportet in multiplicia ipsius $\mu'^4 - \frac{6}{7}\mu'^2 + \frac{3}{35}$, ipsius $\mu^2 - \frac{1}{3}$, atque quantitatum constantium. Quo facto provenit

$$r^3 = a^3(1 + 2e + e^2 - \tfrac{2}{5}A) - a^3(3e + \tfrac{57}{14}e^2 + \tfrac{3}{7}A)(\mu'^2 - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{15}{2}e^2 + 3A)(\mu'^4 - \tfrac{6}{7}\mu'^2 + \tfrac{3}{35})$$

unde $b_0 = a^3(1 + 2e + e^2 - \frac{2}{5}A)$, $z_0 = 1$; simili ratione, quando $m = 2$, eruitur

$$r^5 = \text{Const} - a^5(5e + \tfrac{25}{2}e^2 + \tfrac{5}{7}A)(\mu'^2 - \tfrac{1}{3}) + n(\mu'^4 - \tfrac{6}{7}\mu'^2 + \tfrac{3}{35})$$

si per n significamus multiplex alicujus quantitatis:

unde $b_2 = -a^5(5e + \frac{25}{2}e^2 + \frac{5}{7}A)$, $z_2 = \mu^2 - \frac{1}{3}$; atque pro $m = 4$ habetur

$$r^7 = \text{Const} + n(\mu'^2 - \tfrac{1}{3}) + a^7(\tfrac{63}{2}e^2 + 7A)(\mu'^4 - \tfrac{6}{7}\mu'^2 + \tfrac{3}{35})$$

unde $b_4 = a^7(\frac{63}{2}e^2 + 7A)$, $z_4 = \mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{35}$

Collectis jam diversis terminis expressionis $\frac{1}{(m+3)r'^{m+1}}\int \rho\, da \frac{db_k}{da}\iint U_m z'_k\, d\omega' d\mu'$, pro stratis interioribus evadit

$$V = \frac{4\pi}{1.3r'}\int \rho\, da \frac{d.a^3(1 + 2e + e^2 - \frac{2}{5}A)}{da} - \frac{4\pi}{5^2.r'^3}\int \rho\, da \frac{d.a^5(5e + \frac{25}{2}e^2 + \frac{5}{7}A)}{da}.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \frac{4\pi}{7.9.r'^5}\int \rho\, da \frac{d.a^7(e^2 + \frac{2}{9}A)}{da}(\mu^4 - \tfrac{6}{7}\mu^2 + \tfrac{3}{35})$$

Sit
$$\int \rho\, da \frac{d.a^3(1 + 2e + e^2 - \frac{2}{5}A)}{da} = \phi(a)$$
$$\int \rho\, da \frac{d.a^5(e + \frac{5}{2}e^2 + \frac{1}{7}A)}{da} = \psi(a)$$
$$\int \rho\, da \frac{d.a^7(e^2 + \frac{2}{9}A)}{da} = \upsilon(a)$$

integranda sumendo inter limites $a = 0$ atque $a = \eta$, erit pro stratis interioribus

$$V = \frac{4\pi}{3}\left\{\frac{\phi(\eta)}{r'} - \frac{3}{5}\frac{\psi(\eta)}{r'^3}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \frac{3}{2}\frac{\upsilon(\eta)}{r'^5}(\mu^4 - \tfrac{6}{7}\mu^2 + \tfrac{3}{35})\right\} \ldots\ldots (1)$$

Pro stratis exterioribus, quando $m = 0$, elicitur

$$r^2 = a^2\{1 + 2e(1 - \mu'^2) + e^2(1 - \mu'^2)^2 - (3e^2 + 2A)(\mu'^2 - \mu'^4)\},$$ sive

$$r^2 = a^2\left(1 + \frac{4e}{3} + \frac{2e^2}{15} - \frac{4}{15}A\right) - a^2(2e + \tfrac{11}{17}e^2 + \tfrac{2}{7}A)(\mu'^2 - \tfrac{1}{3}) + a^2(4e^2 + 2A)(\mu'^4 - \tfrac{6}{7}\mu'^2 + \tfrac{3}{35})$$

unde
$$\beta_0 = a^2\left(1 + \frac{4e}{3} + \frac{2e^2}{15} - \frac{4}{15}A\right);\ \zeta_0 = 1$$

Sin vero $m = 2$, provenit

$$\log r = \log a + e(1 - \mu'^2) - \frac{e^2}{2}(1 - \mu'^2)^2 - \left(\frac{3e^2}{2} + A\right)(\mu'^2 - \mu'^4)$$

$$\log r = \text{Const} - \left(e - \frac{5}{14}e^2 + \frac{A}{7}\right)\left(\mu'^2 - \frac{1}{3}\right) + n\left(\mu'^4 - \frac{6}{7}\mu'^2 + \frac{3}{35}\right)$$

unde $c_2 = -\left(e - \frac{5}{14}e^2 + \frac{A}{7}\right)$, $y_2 = \mu^2 - \frac{1}{3}$

Collectis terminis invenitur pro stratis exterioribus

$$V = \frac{4\pi}{2}\int \rho da \frac{d.a^2(1 + \frac{4e}{3} + \frac{2e^2}{15} - \frac{4}{15}A)}{da} - \frac{4\pi}{5}r'^2\int \rho da \frac{d.(e - \frac{5}{14}e^2 + \frac{A}{7})}{da}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \frac{4\pi}{2.9}r'^4\int \rho da \frac{d.Aa^{-2}}{da}(\mu^4 - \tfrac{6}{7}\mu^2 + \tfrac{3}{35})$$

Ponendo
$$\int \rho da \frac{d.a^2\left(1 + \frac{4e}{3} + \frac{2e^2}{15} - \frac{4}{15}A\right)}{da} = \tau(a)$$
$$\int \rho da \frac{d.\left(e - \frac{5}{14}e^2 + \frac{A}{7}\right)}{da} = \chi(a)$$
$$\int \rho da \frac{d.Aa^{-2}}{.da} = \varsigma(a)$$

Sumendoque integralis ab $a = \eta$ usque ad $a = \alpha$ pro stratis exterioribus nanciscimur

$$V = \frac{4\pi}{3}\left\{\tfrac{3}{2}[\tau(\alpha) - \tau(\eta)] - \tfrac{3}{5}r'^2[\chi(\alpha) - \chi(\eta)](\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + \frac{r'^4}{3}[\varsigma(\alpha) - \varsigma(\eta)](\mu^4 - \tfrac{6}{7}\mu^2 + \tfrac{3}{35})\right\} \ldots\ldots (2)$$

Utramque ipsius V expressionem in summam colligendo, completus prodit valor ipsius

$$V = \frac{4\pi}{3}\left\{\frac{\phi(\eta)}{r'} + \tfrac{3}{2}[\tau(\alpha) - \tau(\eta)] + \left(\frac{\psi(\eta)}{r'^3} + r'^2[\chi(\alpha) - \chi(\eta)]\right)\left(\frac{1 - 3\mu^2}{5}\right) + \left(\frac{\upsilon(\eta)}{r'^5} + \frac{2}{9}r'^4[\varsigma(\alpha) - \varsigma(\eta)]\right)(\tfrac{9}{70} - \tfrac{9}{7}\mu^2 + \tfrac{3}{2}\mu^4)\right\} \ldots (3)$$

quo valore ipsius V substituto in § 1. form. 3 habebitur

$$Q = \frac{4\pi}{3}\left\{\frac{\phi(\eta)}{r'} + \tfrac{3}{2}[\tau(\alpha) - \tau(\eta)] + \left(\frac{\psi(\eta)}{r'^3} + r'^2[\chi(\alpha) - \chi(\eta)]\right)\left(\frac{1 - 3\mu^2}{5}\right) + \frac{3\pi}{2T^2}r'^2(1 - \mu^2) + \left(\frac{\upsilon(\eta)}{r'^5} + \tfrac{2}{9}r'^4[\rho(\alpha) - \rho(\eta)]\right)(\tfrac{9}{70} - \tfrac{9}{7}\mu^2 + \tfrac{3}{2}\mu^4)\right\} \ldots (4)$$

Quodsi jam e′ atque E sunt eaedem functiones ipsius η, quales sunt e atque A ipsius a, erit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\eta}\left\{1 - e'(1 - \mu^2) + e'^2\left(1 - \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^4}{2}\right) + E(\mu^2 - \mu^4)\right\};$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\eta^3}\left(1 - 3e'(1 - \mu^2)\right);\quad r^2 = \eta^2\left(1 + 2e'(1 - \mu^2)\right);$$

$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{\eta^5}$; $r^4 = \eta^4$. Quibus valoribus in antecedente substitutis aequatione, eruitur

$$(5)\ldots\mathrm{Q}=\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{array}{l}\frac{\Phi(\eta)}{\eta}+\frac{3}{2}[\tau(\alpha)-\tau(\eta)]\\ -\frac{e'\Phi(\eta)}{\eta}(1-\mu^2)+\left(\frac{\psi(\eta)}{a^3}+\eta^2[\chi(\alpha)-\chi(\eta)]\right)\cdot\frac{1-3\mu^2}{5}+\frac{3\pi}{2T^2}\cdot\eta^2(1-\mu^2)\\ +\frac{e'^2\Phi(\eta)}{\eta}\left(1-\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu^4}{2}\right)+\frac{E\Phi(\eta)}{\eta}(\mu^2-\mu^4)-\frac{3e'\psi(\eta)}{\eta^3}(1-\mu^2)\cdot\frac{1-3\mu^2}{5}+\frac{3\pi}{T^2}.e'\eta^2(1-\mu^2)^2\\ +2e'\eta^2[\chi(\alpha)-\chi(\eta)](1-\mu^2).\frac{1-3\mu^2}{5}+\left(\frac{\upsilon(\eta)}{\eta^5}+\frac{2}{9}\eta^4[\varsigma(\alpha)-\varsigma(\eta)]\right)\left(\frac{9}{70}-\frac{9}{7}\mu^2+\frac{3}{2}\mu^4\right)\end{array}\right.$$

Ponendo $=0$ coëfficientes ipsarum μ^2 atque μ^4, atque a loco η: quod hanc ob causam fieri potest, quum aequatio sit generalis pro omnibus ipsius η valoribus, — prodeunt aequationes aequilibrii

$$(6)\ldots\ldots 0=\left\{\begin{array}{l}\frac{e\Phi(a)}{a}-\frac{3}{5}\frac{\psi(a)}{a^3}-\frac{3}{5}a^2[\chi(\alpha)-\chi(a)]-\frac{3\pi a^2}{2T^2}\\ -\frac{e^2\Phi(a)}{2a}+\frac{A.\Phi(a)}{a}+\frac{12}{5}.\frac{e\psi(a)}{a^3}-\frac{8}{5}ea^2[\chi(\alpha)-\chi(a)]-\frac{6\pi ea^2}{T^2}\\ -\frac{9}{7}\left(\frac{\upsilon(a)}{a^5}+\frac{2}{9}a^4[\varsigma(\alpha)-\varsigma(a)]\right)\end{array}\right.$$

$$(7)\ldots\ldots 0=\left\{\begin{array}{l}-\frac{e^2\Phi(a)}{2a}-\frac{9}{5}.\frac{e\psi(a)}{a^3}-\frac{A\Phi(a)}{a}+\frac{6}{5}ea^2[\chi(\alpha)-\chi(a)]+\frac{3\pi a^2 e}{T^2}\\ +\frac{3}{2}\left(\frac{\upsilon(a)}{a^5}+\frac{2}{9}a^4[\varsigma(\alpha)-\varsigma(a)]\right)\end{array}\right.$$

quae differentiando in duas semper resolvantur aequationes differentiales, unde utraque petitur quantitas A atque e: itaque in illa quam radio tribuimus forma, aequilibrium potest persistere.

Ad superficiem hae aequationes transeunt in sequentes

$$0=(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+A).\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha}-(\frac{3}{5}-\frac{12}{5}\varepsilon).\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^3}-\frac{3\pi}{T^2}\alpha^2(1+4\varepsilon)-\frac{9}{7}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^5}\ldots\ldots(8)$$

$$0=-\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+A\right)\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha}-\frac{9}{5}\varepsilon\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^3}+\frac{3\pi\alpha^2\varepsilon}{T^2}+\frac{3}{2}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

4. Potentia jam, quae ad qualecunque punctum in directionem ipsius r′ adplicatur, differentiando aequationem (4) § 3 respectu ipsius r′ invenitur (1). Quoniam vero haec potentia in directionem x repraesentatur per $\frac{dQ}{dx}$, eadem in directionem ipsius r′ erit $\frac{dQ}{dr'}$, si quidem axin ipsius x cum radio r′ coincidere cogitemus: in hac expressione α est functio ipsius r′; quandoquidem vero termini, ex differentiatione respectu α profluentes, se invicem destruunt, erit haec potentia in directionem ipsius r′

$$\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{array}{l}\frac{\Phi(\alpha)}{r'^2}-\left(2r'[\chi(\alpha)-\chi(a)]-\frac{3\psi(a)}{r'^4}\right).\frac{1-3\mu^2}{5}-\frac{3\pi}{T^2}.r'(1-\mu^2)\\ -\left(\frac{8}{9}r'^3[\varsigma(\alpha)-\varsigma(a)-\frac{5\upsilon(a)}{r'^6}\right)\left(\frac{9}{70}-\frac{9}{7}\mu^2+\frac{3}{2}\mu^4\right)\end{array}\right\}$$

quae ad superficiem externam evadit

$$\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{\Phi(\alpha)}{r'^2}+\frac{3}{5}\frac{\psi(\alpha)}{r'^4}(1-3\mu^2)-\frac{3\pi r'}{T^2}(1-\mu^2)+\frac{\upsilon(\alpha)}{r'^6}\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{7}\mu^2+\frac{15}{2}\mu^4\right)\right\}$$

Quandoquidem vero

$$\frac{1}{r'^2}=\frac{1}{\alpha^2}\left\{1-2\varepsilon(1-\mu^2)+3\varepsilon^2(1-\mu^2)+2A(\mu^2-\mu^4)\right\}$$

$$\frac{1}{r'^4}=\frac{1}{\alpha^4}\left(1-4\varepsilon(1-\mu^2)\right)$$

$$r'=\alpha\left(1+\varepsilon(1-\mu^2)\right);\ \frac{1}{r'^6}=\frac{1}{\alpha^6}$$

potentia ad punctum aliquod superficiei adplicata, in directionem ipsius r′ erit

$$\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{array}{l}\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}-\frac{2\varepsilon\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2)+\frac{3}{5}\frac{\psi(a)}{\alpha^4}(1-3\mu^2)-\frac{3\pi\alpha}{T^2}(1-\mu^2)\\ +\frac{3\varepsilon^2\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2)+\frac{2A\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(\mu^2-\mu^4)-\frac{12}{5}\frac{\varepsilon\psi(\alpha)}{\alpha^4}(1-\mu^2)(1-3\mu^2)\\ -\frac{3\pi\alpha\varepsilon}{T^2}(1-\mu^2)^2+\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{7}\mu^2+\frac{15}{2}\mu^4\right)\end{array}\right.$$

(1) *Méc. cél.* Tom. 2 pag. 71.

dividendo hanc expressionem per Cosinum anguli lineae verticalis, omnis habetur gravitatis actio ad qualecunque superficiei punctum: quae per g denotata fit

$$(1)\ldots\mathrm{g}=\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{aligned}&\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}-\frac{2\varepsilon\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2)+\frac{3}{5}\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4}(1-3\mu^2)-\frac{3\pi\alpha}{T^2}(1-\mu^2)+\frac{2\varepsilon^2\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(\mu^2-\mu^4)\\&+\frac{3\varepsilon^2\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\mu^2)+\frac{2A\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(\mu^2-\mu^4)-\frac{12}{5}\frac{\varepsilon\psi(\alpha)}{\alpha^4}(1-\mu^2)(1-3\mu^2)\\&-\frac{3\pi\alpha\varepsilon}{T^2}(1-\mu^2)^2+\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\left(\frac{9}{14}-\frac{45}{7}\mu^2+\frac{15}{2}\mu^4\right)\end{aligned}\right.$$

in qua expressione, si Sinus latitudinis correctae μ mutatur in Sinum latitudinis verae, sive in Sin λ, prodit

$$(2)\ldots\mathrm{g}=\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{aligned}&\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-2\varepsilon+3\varepsilon^2)+\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4}\left(\frac{3}{5}-\frac{12}{5}\varepsilon\right)-\frac{3\pi\alpha}{T^2}(1+\varepsilon)\\&+\frac{9}{14}\cdot\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}+\left[\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(2\varepsilon-3\varepsilon^2)-\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4}\left(\frac{9}{5}-\frac{12}{5}\varepsilon\right)+\frac{3\pi\alpha}{T^2}(1+\varepsilon)+\frac{15}{4}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\right]\mathrm{Sin}^2\lambda\\&-\left(\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(6\varepsilon^2-2A)-\frac{72}{5}\frac{\varepsilon\psi(\alpha)}{\alpha^4}+\frac{9\pi\alpha\varepsilon}{T^2}+\frac{15}{2}\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}\right)\mathrm{Sin}^2\lambda\,\mathrm{Cos}^2\lambda\end{aligned}\right.$$

Est autem ex § 3. form. (7) et (8)

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^4}=\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(\frac{5\varepsilon}{3}+\frac{5\varepsilon^2}{6}+\frac{5A}{21}\right)-\frac{3\pi\alpha}{2T^2}\left(\frac{5}{3}+\frac{130}{21}\varepsilon\right),\text{ atque}$$

$$\frac{\upsilon(\alpha)}{\alpha^6}=\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(\frac{7\varepsilon^2}{3}+\frac{2A}{3}\right)-\frac{5\pi\alpha\varepsilon}{T^2}$$

Quibus valoribus in aequationem (2) surrogatis provenit

$$(3)\ldots\mathrm{g}=\frac{4\pi}{3}\left\{\begin{aligned}&\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}\left[1-\varepsilon+\varepsilon^2+\frac{4A}{7}\right]-\frac{3\pi\alpha}{2T^2}\left(3+\frac{27}{7}\varepsilon\right)\\&+\left(\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(2\varepsilon^2-\varepsilon+\frac{2}{7}A\right)+\frac{3\pi\alpha}{2T^2}\left(5+\frac{39}{7}\varepsilon\right)\right)\mathrm{Sin}^2\lambda\\&-\left(\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(3A-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)+\frac{15\pi\alpha\varepsilon}{2T^2}\right)\mathrm{Sin}^2\lambda\,\mathrm{Cos}^2\lambda\end{aligned}\right.$$

Ponamus $\varkappa$ significare relationem vim centrifugam inter atque gravitatem ad aequatorem: est autem vis centrifuga ad aequatorem $=\frac{4\pi\alpha^2}{T^2}\alpha(1+\varepsilon)$; gravitas

vero ad aequatorem $=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}(1-\varepsilon)-\frac{9\pi\alpha}{2T^2}\right)$: itaque $\frac{3\pi\alpha}{T^2}(1+\varepsilon)=$ $\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}\cdot\varkappa(1-\varepsilon)-\frac{9\pi\alpha\varkappa}{2T^2}$: unde $\frac{3\pi\alpha}{2T^2}=\frac{\Phi(\alpha)\varkappa}{\alpha^2}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon-\frac{3\varkappa}{4}\right)$: quibus valoribus in aequationem (3) substitutis habebitur

$$\mathrm{g}=\frac{4\pi}{3}\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^2}\left(1-\varepsilon-\tfrac{3}{2}\varkappa+\varepsilon^2+\tfrac{15}{14}\varkappa\varepsilon+\tfrac{9}{4}\varkappa^2+\tfrac{4}{7}A\right)\left\{1+\left(\tfrac{5\varkappa}{2}-\varepsilon+\varepsilon^2-\tfrac{17}{14}\varkappa\varepsilon+\tfrac{2}{7}A\right)\mathrm{Sin}^2\lambda-\left[\tfrac{5}{2}\varkappa\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+3A\right]\mathrm{Sin}^2\lambda\,\mathrm{Cos}^2\lambda\right\}\ldots.(4)$$

unde repraesentando per g′ gravitatem ad aequatorem, erit pro quacunque latitudine λ

$$\mathrm{g}=\mathrm{g}'\left\{1+\left[\frac{5\varkappa}{2}-\varepsilon+\varepsilon^2-\frac{17}{14}\varkappa\varepsilon+\frac{2}{7}A\right]\mathrm{Sin}^2\lambda-\left[\frac{5}{2}\varkappa\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+3A\right]\mathrm{Sin}^2\lambda\,\mathrm{Cos}^2\lambda\right\}\ldots.(5)$$

Qualiscunque igitur sit densitatis ratio in telluris meditullio, gravitas ad quodcunque superficiei punctum expressione continetur, quae non nisi a functionibus superficiei terrestris dependet.

5. Quae expressio ut jam ad experimenta adplicetur, circa penduli longitudinem instituta, ponamus $\mathrm{Sin}^2\lambda$ atque $\mathrm{Sin}^2\lambda\,\mathrm{Cos}^2\lambda$ esse resolutos in Cosinus arcuum multiplicium, ita ut in universum longitudo penduli simplicis exprimatur formulâ

$$\mathrm{l}=\mathrm{x}+\mathrm{y}\,\mathrm{Cos}\,2\lambda+\mathrm{z}\,\mathrm{Cos}\,4\lambda\ldots.(1)$$

In experimentis recentioribus, circa penduli longitudinem institutis, differentiam longitudinem penduli observatam inter atque illam, quae formulâ (1) acquiritur, successive per d_1, d_2, $\mathrm{d}_3\ldots.\mathrm{d}_n$ repraesentando, series constituitur aequationum conditionis formae

$$\mathrm{l}-\mathrm{x}-\mathrm{y}\,\mathrm{Cos}\,2\lambda-\mathrm{z}\,\mathrm{Cos}\,4\lambda=\mathrm{d}_n,$$

quae (1) secundum methodum quadratorum minimorum expeditae, aequationes praebent minimi respectu ipsarum x, y, z

(1) Singulae conditionis aequationes tabulis 2. 3. continentur adfixis, in quibus observandum, longitudinem Penduli simplicis, qualem KATERUS et SABINIUS Londini in aedibus BROWNII ad Portlandplace = 39,13929 poll. angl. invenerunt, tanquam unitatem esse adsumtam.

$$o = 0{,}99891460 - x - 0{,}19998793 \,.\, y + 0{,}18790446 \,.\, z$$
$$o = 0{,}19883059 - 0{,}19998793 \,.\, x - 0{,}40604785 \,.\, y - 0{,}19772944 \,.\, z$$
$$o = -\,0{,}18829376 + 0{,}18790446 \,.\, x - 0{,}19772944 \,.\, y - 0{,}54080177 \,.\, z$$

quibus aequationibus solutis prodit

$$x = 0{,}999438299$$
$$y = -\,0{,}00258898$$
$$z = 0{,}00003156$$

unde aequatio (1) abit in

$$\left.\begin{aligned} l &= 0{,}999438299 - 0{,}00258898 \text{ Cos } 2\lambda + 0{,}00003156 \text{ Cos } 4\lambda \\ l &= 0{,}99688088 \,\{1 + 0{,}00519416 \text{ Sin}^2 \lambda - 0{,}00025328 \text{ Sin}^2 \lambda \text{ Cos}^2 \lambda\} \end{aligned}\right\} \ldots . (2)$$

unde sequitur

$$g = 9{,}83881989 \,\{1 + 0{,}00519416 \text{ Sin}^2 \lambda - 0{,}00025328 \text{ Sin}^2 \lambda \text{ Cos}^2 \lambda\} \ldots . (3)$$

Comparando jam coëfficientes ipsorum $\text{Sin}^2 \lambda$ atque $\text{Sin}^2 \lambda \text{ Cos}^2 \lambda$ cum illis form. (5) praecedentis §, proveniunt

$$\frac{5\varkappa}{2} - \varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{17}{14} \varkappa\varepsilon + \frac{2}{7} A = 0{,}00519416 \ldots . (4)$$

$$\frac{5}{2} \varkappa\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + 3A = 0{,}00025328 \ldots . (5)$$

Assumendo aequatoris radium $= 6414873{,}6$ erit $\varkappa = 0{,}00346699$; quo valore in aequationes (4) et (5) substituto, evadit telluris ellipticitas maxime probabilis ex penduli observationibus

$$\varepsilon = 0{,}00349264 = \frac{1}{286{,}32}, \text{ atque}$$

$$A = 0{,}00007637 = \frac{1}{13094{,}57}.$$

THESES.

1.

Hugenius verus est horologiorum pendulorum inventor.

2.

Nullus potest informari nexus naturae leges inter atque numerorum proprietates: ad quas igitur qui statim recurrant in scrutandis phaenomenorum legibus, eorum studium vanum prorsus est habendum.

3.

Egregie Klügelius: »Man muss bei mathematischen untersuchungen nicht immer fragen wozu sie nuzen mögen; es ist schon genug, wenn diese dem geiste eine unterhaltende übung seiner kräfte gewähren, wenn sie zur entwiklung sehr verstekter verhältnisse auf einem unerwarteten wege führen, wenn neue vergleichungsmittel gefunden werden, um die schwierigkeiten zu überwinden, die sich bei erweiterten untersuchungen entgegenstellen."

4.

Immerito in litteris ad Mersennum missis Cartesius sibi vindicat legem corporum libere cadentium, secundum quam spatia sunt uti quadrata temporum.

5.

Systema quod dicitur Copernicanum frustra quaeritur apud veteres.

6.

Albertus girardus verus habendus est inventor formulae vulgo newtono tributae, quâ summa dignitatum ex aequationis radicibus per radicum ipsarum exprimitur combinationes.

7.

Recte breislakius: »La nature est toujours la même, et la force qui fait tomber à terre une pomme détachée de l'arbre, ou qui dispose autour d'un point les parties infinement petites d'une goutte d'eau, est encore la même qui soutient et fait tourner les corps célestes dans l'immensité de l'espace."

8.

Ex Astronomiae, qua nunc est, in principiis certitudine, a priori licet concludere, unumquodque systematis solaris astrum eisdem quibus cetera jam cognita legibus obtemperare.

9.

Penduli longitudinem adhibendi, tanquam modulum mensurae universalis, primum auctorem perperam jactant moutonum.

10.

Leibnitii de calculi differentialis principiis non unam eandemque semper exstitisse contendimus sententiam.

11.

Illius intercalationis methodi, quae spatio triginta trium annorum octo praescribit bissextiles, temere a Persis repetitur origo.

12.

Optices instrumentorum perfectio postulatum est, unde pendent futuri Astronomiae progressus.

Longitudo Penduli simplicis, singula minuta secunda oscillantis, ex observationibus anterioribus.

LOCUS OBSERVATIONIS.	LATITUDO.	Long. Pend. simpl. metris expressa.	OBSERVATORES.
Aequator	0° 0'	0m,99078	Bouguer.
Puntapalmar	0. 2.	0,99022	Condamine.
Riojama	0. 9.	0,98990	Bouguer.
		0,99015	Condamine.
Pichincha	0. 13.	0,98961	Bouguer.
Quito	0. 25.	0,98990	Bouguer.
		0,99069	Godin, D. Juan, Ulloa.
Quito, ad mare		0,99053	Bouguer.
Quito	0. 38.	0,98995	Condamine.
Para	1. 28.	0,99081	Condamine.
Cayenne	4. 56.	0,99110	Richer.
		0,98918	des Hayes.
Paraiba	6. 38.	0,98580	Couplet.
Zamboanga	6. 55.	0,99092	Malaspina.
Panama	8. 35.	0,99076	Godin, Bouguer, Condamine.
Portobelo	9. 33.	0,98713	Feuillé.
		0,99047	Godin.
		0,99049	Bouguer.
Pondichery	11. 56.	0,99108	le Gentil.
Lima	12. 5.	0,99101	Malaspina.
Granada	12. 6.	0,98916	des Hayes.
Umatag	13. 18.	0,99083	Malaspina.
Manille	14. 34.	0,99148	le Gentil.
Manila	14. 36.	0,99137	Malaspina.
Gorea	14. 40.	0,98929	des Hayes.
Martinique	14. 44.	0,98916	des Hayes.
Guadaloupe	16. 0.	0,98916	Warin, des Hayes.
St. Helena	16. 0.	0,99182	Halley.
Acapulco	16. 50.	0,99123	Malaspina.
St. Christophore	17. 19.	0,98975	des Hayes.
Foulpointe	17. 40.	0,99130	le Gentil.
Jamaica, Blak River	18. 0.	0,99153	Campbell.
St. Domingo, Petit-Goave	18. 27.	0,99130	Condamine.
		0,99083	Bouguer.
		0,99114	Godin.
Isla Babao	18. 39.	0,99139	Malaspina.
Guarico	19. 46.	0,99132	Don Juan.
St. Domingo, Promontorium	19. 48.	0,99031	des Hayes.
Ile de France	20. 10.	0,99207	la Caille.
Macao	23. 12.	0,99110	Malaspina.
Cairo	30. 2.	0,99313	Chazelles.
Puerto Jackson	33. 51.	0,99254	Malaspina.
Promontorium B. S.	33. 55.	0,99288	la Caille.
Monteviedo	34. 55.	0,99263	Malaspina.
Cadiz	36. 32.	0,99254	Malaspina.
Monterey	36. 36.	0,99229	Malaspina.
Concepcion	36. 42.	0,99259	Malaspina.

LOCUS OBSERVATIONIS.	LATITUDO.	Long. Pend. simpl. metris expressa.	OBSERVATORES.
Lissabon	38° 42'	0,98805	Couplet.
Roma	41. 54.	0,99320	Jacquier, le Seur.
Port de Sete	43. 24.	0,99369	Picard.
Bayonne	43. 30.	0,99369	Picard.
Toulouse	43. 36.	0,99338	Darquier.
Firenze	43. 47.	0,99372	Ximenes.
Santa Elena	44. 30.	0,99374	Malaspina.
Lion	45. 46.	0,98873	Mouton.
		0,99369	Picard.
Wien	48. 12.	0,99383	Liesganig.
Paris	48. 50.	0,99369	Picard.
		0,99392	Huygens.
		0,99392	Richer.
		0,99381	Warin, des Hayes.
		0,99369	Chazelles.
		0,99363	Godin.
		0,99387	Bouguer.
		0,99275	Condamine.
		0,99385	Mairan.
		0,99384	Borda.
Paris	48. 51.	0,99435	la Caille.
Nutka	49. 35.	0,99365	Malaspina.
Gotha	50. 58.	0,99394	von Zach.
Selenginsk	51. 6.	0,99378	Rumousky.
Puerto Egmont	51. 21.	0,99394	Malaspina.
London	51. 31.	0,99369	Römer.
		0,99426	Graham.
		0,99362	Whitehurst.
's Gravenhage	52. 4.	0,99369	Picard, Bartholinus.
Leiden	52. 9.	0,99417	Lulofs.
Greifswald	54. 4.	0,99444	Mayer.
Uranienburg	55. 41.	0,99369	Picard.
Arensberg	58. 15.	0,99448	Grischow.
Pernau	58. 23.	0,99455	Grischow.
Dorpat	58. 23.	0,99457	Grischow.
Mulgrave	59. 23.	0,99509	Malaspina.
Reval	59. 26.	0,99460	Grischow.
Upsala	59. 52.	0,99462	Celsius.
Petersburg	59. 56.	0,99475	Mallet, Grischow.
		0,99381	Rumousky.
		0,99275	Henry.
Archangel	64. 34.	0,99403	de l'Isle de la Croyère.
		0,99509	Rumousky.
Pello	66. 48.	0,99520	Maupertuis, Camus.
Ponoi	67. 4.	0,99523	Mallet.
Kola	68. 52.	0,99554	Rumousky.
Spitsbergen	79. 50.	0,99568	Mulgrave.

Aequationes conditionis, quibus longitudines Penduli simplicis minuta singula secunda oscillantis ex observationibus recentiorum cum theoria comparantur (Series 1ma).

LOCUS OBSERVATIONIS.	LATITUDO.	Long. Pend. simpl. in vacuo, ad maris libellam, 62° F.	— x —	y Cos 2λ	—	z Cos 4λ	= d_n	LOCI OBSERVATIONIS CHARACTER GEOLOGICUS.	OBSERVATORES.
Rawak	0° 1′ 34″,5	0,99681831	— x —	0,99999958 . y	—	0,99999832 . z	= d_1		Freycinet, Lamarche, Guerin.
S^t. Thomas	0 . 24 . 41,2	0,99697107	— x —	0,99989687 . y	—	0,99958749 . z	= d_2	Saxum basalticum	Sabine.
Galapagos	0 . 32 . 19,05	0,99687993	— x —	0,99982326 . y	—	0,99929309 . z	= d_3	Superficies tabularis lavae non valde compactae	Hall.
Maranham	2 . 31 . 43,3	0,99675135	— x —	0,99610690 . y	—	0,98445792 . z	= d_4	Terra allata	Sabine.
Ascension	7 . 55 . 47,8	0,99705692	— x —	0,96193286 . y	—	0,85062967 . z	= d_5	Rupes vulcanica compacta	Sabine.
—	7 . 55 . 48.	0,99705800	— x —	0,96193233 . y	—	0,85062763 . z	= d_6		Duperrey.
Sierra Leone	8 . 29 . 27,9	0,99695140	— x —	0,95639571 . y	—	0,82938551 . z	= d_7	Granitum facile solubile	Sabine.
Trinidad	10 . 38 . 55,9	0,99692253	— x —	0,93170567 . y	—	0,73615090 . z	= d_8	Terra alluta	Sabine.
Bahia	12 . 59 . 21.	0,99706754	— x —	0,89895975 . y	—	0,61625728 . z	= d_9	Regio profunda cujus basis constat ex psammolitho	Sabine.
Madras	13 . 4 . 9,1	0,99704517	— x —	0,89773261 . y	—	0,61184766 . z	= d_{10}	Argilla et limus coeruleus	Goldingham.
Guam (Agagna)	13 . 27 . 51,5	0,99731567	— x —	0,89157149 . y	—	0,58979945 . z	= d_{11}		Freycinet, Pellion.
Jamaica	17 . 56 . 7,6	0,99733797	— x —	0,81033946 . y	—	0,31330009 . z	= d_{12}	Saxa calcarea	Sabine.
Ile de France	20 . 9 . 23.	0,99763474	— x —	0,76252407 . y	—	0,16288591 . z	= d_{13}		Duperrey.
— (Port Louis)	20 . 9 . 56,4	0,99766271	— x —	0,76231451 . y	—	0,16224681 . z	= d_{14}		Freycinet, Duperrey, Fabré.
Mowi (Raheina)	20 . 52 . 7.	0,99765049	— x —	0,74620586 . y	—	0,11364634 . z	= d_{15}		Freycinet, Berard, Raillard.
San Blas	21 . 32 . 23,67	0,99740612	— x —	0,73040293 . y	—	0,06697687 . z	= d_{16}		Hall.
Rio Janeiro (anse de la Gloria)	22 . 55 . 0,7	0,99757317	— x —	0,69674303 . y	+	0,02909829 . z	= d_{17}		Freycinet, Labiche, Laborde
Rio Janeiro (Gloria Hill)	22 . 55 . 21,95	0,99755714	— x —	0,69659522 . y	+	0,02951020 . z	= d_{18}	Granitum.	Foster.
Rio Janeiro (faubourg du Catete)	22 . 55 . 25,1	0,99755111	— x —	0,69657330 . y	+	0,02957126 . z	= d_{19}		Freycinet, Duperrey.
Paramatta	33 . 48 . 43.	0,99840620	— x —	0,38068486 . y	+	0,71015807 . z	= d_{20}		Brisbane, Dunlop.
Port Jackson (Sydney)	33 . 51 . 34,1	0,99849237	— x —	0,37915022 . y	+	0,71249021 . z	= d_{21}		Freycinet, Fabré, Duperrey.
Port Jackson	33 . 51 . 40.	0,99845957	— x —	0,37909729 . y	+	0,71257049 . z	= d_{22}		Duperrey.
Promontorium B. S.	33 . 55 . 15.	0,99843623	— x —	0,37716737 . y	+	0,71548954 . z	= d_{23}		Freycinet, Ferrand, Dubaut.
Formentera	38 . 39 . 56,1	0,99882369	— x —	0,21931552 . y	+	0,90380141 . z	= d_{24}		Arago, Chaix, Biot.
New-York	40 . 42 . 43,1	0,99903907	— x —	0,14912116 . y	+	0,95552576 . z	= d_{25}	Stratum argillae cujus basis serpentinum	Renwick, Sabine.
Toulon	43 . 7 . 20.	0,99925130	— x —	0,06549988 . y	+	0,99141953 . z	= d_{26}		Duperrey.
Figeac	44 . 36 . 45.	0,99930581	— x —	0,01352589 . y	+	0,99963410 . z	= d_{27}		Mathieu, Biot.
Bordeaux	44 . 50 . 26.	0,99932702	— x —	0,00556563 . y	+	0,99993805 . z	= d_{28}		Mathieu, Biot.
Clermont	45 . 46 . 48.	0,99940801	— x +	0,02722377 . y	+	0,99851775 . z	= d_{29}		Mathieu, Biot.
Paris (Observ.)	48 . 50 . 13,16	0,99973556	— x +	0,13353609 . y	+	0,96433625 . z	= d_{30}		Bouvard, Mathieu, Biot.
Dunnose (Shanklin-Farm)	50 . 37 . 23,94	0,99991727	— x +	0,19503269 . y	+	0,92392450 . z	= d_{31}		Kater.
Duinkerken	51 . 2 . 10.	0,99995963	— x +	0,20914450 . y	+	0,91251716 . z	= d_{32}		Mathieu, Biot.
Greenwich	51 . 28 . 38,01	0,99997050	— x +	0,22417636 . y	+	0,89948992 . z	= d_{33}		Biot, Arago, von Humboldt.
London (Portland Place)	51 . 31 . 8,4	1,00000000	— x +	0,22559723 . y	+	0,89821178 . z	= d_{34}	Regio argilloso-calcarea	Kater, Sabine.
Malouines	51 . 31 . 44,5	1,00000373	— x +	0,22593823 . y	+	0,89790383 . z	= d_{35}		Duperrey.
— (Conti)	51 . 35 . 18,2	0,99994431	— x +	0,22795624 . y	+	0,89607189 . z	= d_{36}		Freycinet, Duperrey.
Arbury-Hill	52 . 12 . 55,32	1,00007462	— x +	0,24920940 . y	+	0,87578935 . z	= d_{37}	Saxa formationis primitivae	Kater.
Clifton	53 . 27 . 43,93	1,00016868	— x +	0,29110973 . y	+	0,83051025 . z	= d_{38}		Kater.
Königsberg	54 . 33 . 1,6	1,00032504	— x +	0,32723256 . y	+	0,78583770 . z	= d_{39}		Bessel, Erman, Anger.
Leith Fort	55 . 58 . 37.	1,00041110	— x +	0,37386028 . y	+	0,72045698 . z	= d_{40}		Biot.
—	55 . 58 . 40,8	1,00041498	— x +	0,37389446 . y	+	0,72040587 . z	= d_{41}		Kater.
Portsoy	57 . 40 . 58,65	1,00056991	— x +	0,42839769 . y	+	0,63295083 . z	= d_{42}	Schista serpentinea et granitum	Kater.
Unst	60 . 45 . 25.	1,00082986	— x +	0,52270523 . y	+	0,45355847 . z	= d_{43}		Biot.
—	60 . 45 . 28,2	1,00082237	— x +	0,52273169 . y	+	0,45350317 . z	= d_{44}	Colles ex serpentino compositi	Kater.
Drontheim	63 . 25 . 54,2	1,00090114	— x +	0,59990989 . y	+	0,28021624 . z	= d_{45}	Regio argillosa cujus basis micaschista	Sabine.
Hammerfest	70 . 40 . 5,3	1,00142823	— x +	0,78082613 . y	—	0,21937890 . z	= d_{46}	Micaschista	Sabine.
Port-Bowen	73 . 13 . 39,4	1,00161483	— x +	0,83345422 . y	—	0,38929187 . z	= d_{47}	Calx secundaria	Foster.
Groenland	74 . 32 . 18,6	1,00163672	— x +	0,85785869 . y	—	0,47184306 . z	= d_{48}	Psammolithos	Sabine.
Spitsbergen	79 . 49 . 57,8	1,00192645	— x +	0,93767952 . y	—	0,75848578 . z	= d_{49}	Quarzum	Sabine.

Conditio minimi respectu x .... 0 = 0,99891460 — x — 0,19998793 . y + 0,18790446 . z

Tab. 3.

Aequationum conditionis Series secunda.

$0{,}99680179 - 0{,}99999958 \cdot x - 0{,}99999916 \cdot y - 0{,}99999790 \cdot z$

$0{,}99686825 - 0{,}99989687 \cdot x - 0{,}99979374 \cdot y - 0{,}99948440 \cdot z$

$0{,}99670374 - 0{,}99982326 \cdot x - 0{,}99964654 \cdot y - 0{,}99911647 \cdot z$

$0{,}99287895 - 0{,}99610690 \cdot x - 0{,}99222896 \cdot y - 0{,}98062532 \cdot z$

$0{,}95910182 - 0{,}96193286 \cdot x - 0{,}92531484 \cdot y - 0{,}81824864 \cdot z$

$0{,}95910233 - 0{,}96193233 \cdot x - 0{,}92531382 \cdot y - 0{,}81824623 \cdot z$

$0{,}95348004 - 0{,}95639571 \cdot x - 0{,}91469275 \cdot y - 0{,}79322074 \cdot z$

$0{,}92883837 - 0{,}93170567 \cdot x - 0{,}86807545 \cdot y - 0{,}68587597 \cdot z$

$0{,}89631749 - 0{,}89895975 \cdot x - 0{,}80812864 \cdot y - 0{,}55399492 \cdot z$

$0{,}89507997 - 0{,}89773261 \cdot x - 0{,}80592384 \cdot y - 0{,}54927560 \cdot z$

$0{,}88917821 - 0{,}89157149 \cdot x - 0{,}79489972 \cdot y - 0{,}52584837 \cdot z$

$0{,}80818231 - 0{,}81033946 \cdot x - 0{,}65665005 \cdot y - 0{,}25387943 \cdot z$

$0{,}76072502 - 0{,}76252407 \cdot x - 0{,}58144295 \cdot y - 0{,}12420442 \cdot z$

$0{,}76053276 - 0{,}76231451 \cdot x - 0{,}58112341 \cdot y - 0{,}12368310 \cdot z$

$0{,}74445264 - 0{,}74620586 \cdot x - 0{,}55682318 \cdot y - 0{,}08480358 \cdot z$

$0{,}72850835 - 0{,}73040293 \cdot x - 0{,}53348844 \cdot y - 0{,}04892010 \cdot z$

$0{,}69505215 - 0{,}69674303 \cdot x - 0{,}48545086 \cdot y + 0{,}02027403 \cdot z$

$0{,}69489353 - 0{,}69659522 \cdot x - 0{,}48524490 \cdot y + 0{,}02055667 \cdot z$

$0{,}69486747 - 0{,}69657330 \cdot x - 0{,}48521437 \cdot y + 0{,}02059855 \cdot z$

$0{,}38007813 - 0{,}38068486 \cdot x - 0{,}14492097 \cdot y + 0{,}27034643 \cdot z$

$0{,}37857861 - 0{,}37915022 \cdot x - 0{,}14375489 \cdot y + 0{,}27014082 \cdot z$

$0{,}37851331 - 0{,}37909729 \cdot x - 0{,}14371475 \cdot y + 0{,}27013354 \cdot z$

$0{,}37657757 - 0{,}37716737 \cdot x - 0{,}14225195 \cdot y + 0{,}26985310 \cdot z$

$0{,}21905754 - 0{,}21931552 \cdot x - 0{,}04809930 \cdot y + 0{,}19821767 \cdot z$

$0{,}14897787 - 0{,}14912116 \cdot x - 0{,}02223712 \cdot y + 0{,}14248911 \cdot z$

$0{,}06545084 - 0{,}06549988 \cdot x - 0{,}00429023 \cdot y + 0{,}06493786 \cdot z$

$0{,}01351650 - 0{,}01352589 \cdot x - 0{,}00018295 \cdot y + 0{,}01352094 \cdot z$

$0{,}00556189 - 0{,}00556563 \cdot x - 0{,}00003098 \cdot y + 0{,}00556529 \cdot z$

$-0{,}02720766 + 0{,}02722377 \cdot x - 0{,}00074113 \cdot y - 0{,}02718342 \cdot z$

$-0{,}13350078 + 0{,}13353609 \cdot x - 0{,}01783189 \cdot y - 0{,}12877370 \cdot z$

$-0{,}19501656 + 0{,}19503269 \cdot x - 0{,}03803775 \cdot y - 0{,}18019548 \cdot z$

$-0{,}20913605 + 0{,}20914450 \cdot x - 0{,}04374142 \cdot y - 0{,}19084794 \cdot z$

$-0{,}22416975 + 0{,}22417636 \cdot x - 0{,}05025541 \cdot y - 0{,}20164438 \cdot z$

$-0{,}22559723 + 0{,}22559723 \cdot x - 0{,}05089411 \cdot y - 0{,}20263409 \cdot z$

$-0{,}22593907 + 0{,}22593823 \cdot x - 0{,}05104808 \cdot y - 0{,}20287080 \cdot z$

$-0{,}22794356 + 0{,}22795624 \cdot x - 0{,}05196405 \cdot y - 0{,}20426519 \cdot z$

$-0{,}24922799 + 0{,}24920940 \cdot x - 0{,}06210532 \cdot y - 0{,}21825494 \cdot z$

$-0{,}29115347 + 0{,}29110973 \cdot x - 0{,}08474487 \cdot y - 0{,}24176961 \cdot z$

$-0{,}32733989 + 0{,}32723256 \cdot x - 0{,}10708115 \cdot y - 0{,}25715168 \cdot z$

$-0{,}37401398 + 0{,}37386028 \cdot x - 0{,}13977151 \cdot y - 0{,}26935250 \cdot z$

$-0{,}37404962 + 0{,}37389446 \cdot x - 0{,}13979700 \cdot y - 0{,}26935576 \cdot z$

$-0{,}42864184 + 0{,}42839769 \cdot x - 0{,}18352458 \cdot y - 0{,}27115468 \cdot z$

$-0{,}52313901 + 0{,}52270523 \cdot x - 0{,}27322763 \cdot y - 0{,}23707739 \cdot z$

$-0{,}52316157 + 0{,}52273169 \cdot x - 0{,}27324842 \cdot y - 0{,}23706048 \cdot z$

$-0{,}60045050 + 0{,}59990989 \cdot x - 0{,}35989188 \cdot y - 0{,}16810450 \cdot z$

$-0{,}78194133 + 0{,}78082613 \cdot x - 0{,}60968945 \cdot y + 0{,}17129678 \cdot z$

$-0{,}83480010 + 0{,}83345422 \cdot x - 0{,}69464593 \cdot y + 0{,}32445695 \cdot z$

$-0{,}85926276 + 0{,}85785869 \cdot x - 0{,}73592153 \cdot y + 0{,}40477467 \cdot z$

$-0{,}93948592 + 0{,}93767952 \cdot x - 0{,}87924289 \cdot y + 0{,}71121659 \cdot z$

Conditio minimi respectu y

$0 = 0{,}19883059 - 0{,}19998793 \cdot x - 0{,}40604785 \cdot y - 0{,}19772944 \cdot z$

Aequationum conditionis Series tertia.

$0{,}99680166 - 0{,}99999832 \cdot x - 0{,}99999790 \cdot y - 0{,}99999664 \cdot z$

$0{,}99655981 - 0{,}99958749 \cdot x - 0{,}99948440 \cdot y - 0{,}99917514 \cdot z$

$0{,}99617523 - 0{,}99929309 \cdot x - 0{,}99911647 \cdot y - 0{,}99858667 \cdot z$

$0{,}98125975 - 0{,}98445792 \cdot x - 0{,}98062532 \cdot y - 0{,}96915739 \cdot z$

$0{,}84812620 - 0{,}85062967 \cdot x - 0{,}81824864 \cdot y - 0{,}72357084 \cdot z$

$0{,}84812509 - 0{,}85062763 \cdot x - 0{,}81824623 \cdot y - 0{,}72356737 \cdot z$

$0{,}82685705 - 0{,}82938551 \cdot x - 0{,}79322074 \cdot y - 0{,}68788032 \cdot z$

$0{,}73388542 - 0{,}73615090 \cdot x - 0{,}68587597 \cdot y - 0{,}54191815 \cdot z$

$0{,}61444595 - 0{,}61625728 \cdot x - 0{,}55399492 \cdot y - 0{,}37977303 \cdot z$

$0{,}61003977 - 0{,}61184766 \cdot x - 0{,}54927560 \cdot y - 0{,}37435756 \cdot z$

$0{,}58821623 - 0{,}58979945 \cdot x - 0{,}52584837 \cdot y - 0{,}34786339 \cdot z$

$0{,}31246608 - 0{,}31330009 \cdot x - 0{,}25387943 \cdot y - 0{,}09815695 \cdot z$

$0{,}16250064 - 0{,}16288591 \cdot x - 0{,}12420442 \cdot y - 0{,}02653182 \cdot z$

$0{,}16186759 - 0{,}16224681 \cdot x - 0{,}12368310 \cdot y - 0{,}02632428 \cdot z$

$0{,}11337935 - 0{,}11364634 \cdot x - 0{,}08480358 \cdot y - 0{,}01291550 \cdot z$

$0{,}06680314 - 0{,}06697687 \cdot x - 0{,}04892010 \cdot y - 0{,}00448590 \cdot z$

$-0{,}02902767 + 0{,}02909829 \cdot x + 0{,}02027403 \cdot y - 0{,}00084671 \cdot z$

$-0{,}02943811 + 0{,}02951020 \cdot x + 0{,}02055667 \cdot y - 0{,}00087085 \cdot z$

$-0{,}02949885 + 0{,}02957126 \cdot x + 0{,}02059855 \cdot y - 0{,}00087446 \cdot z$

$-0{,}70902622 + 0{,}71015807 \cdot x + 0{,}27034643 \cdot y - 0{,}50432448 \cdot z$

$-0{,}71141604 + 0{,}71249021 \cdot x + 0{,}27014082 \cdot y - 0{,}50764231 \cdot z$

$-0{,}71147283 + 0{,}71257049 \cdot x + 0{,}27013354 \cdot y - 0{,}50775671 \cdot z$

$-0{,}71437683 + 0{,}71548954 \cdot x + 0{,}26985310 \cdot y - 0{,}51192529 \cdot z$

$-0{,}90273825 + 0{,}90380141 \cdot x + 0{,}19821767 \cdot y - 0{,}81685698 \cdot z$

$-0{,}95460757 + 0{,}95552576 \cdot x + 0{,}14248911 \cdot y - 0{,}91302948 \cdot z$

$-0{,}99067725 + 0{,}99141953 \cdot x + 0{,}06493786 \cdot y - 0{,}98291268 \cdot z$

$-0{,}99894017 + 0{,}99963410 \cdot x + 0{,}01352094 \cdot y - 0{,}99926833 \cdot z$

$-0{,}99926511 + 0{,}99993805 \cdot x + 0{,}00556529 \cdot y - 0{,}99987610 \cdot z$

$-0{,}99792662 + 0{,}99851775 \cdot x - 0{,}02718342 \cdot y - 0{,}99703766 \cdot z$

$-0{,}96408124 + 0{,}96433625 \cdot x - 0{,}12877370 \cdot y - 0{,}92994440 \cdot z$

$-0{,}92384806 + 0{,}92392450 \cdot x - 0{,}18019548 \cdot y - 0{,}85363648 \cdot z$

$-0{,}91248323 + 0{,}91251716 \cdot x - 0{,}19084794 \cdot y - 0{,}83268757 \cdot z$

$-0{,}89946339 + 0{,}89948992 \cdot x - 0{,}20164438 \cdot y - 0{,}80908211 \cdot z$

$-0{,}89821178 + 0{,}89821178 \cdot x - 0{,}20263409 \cdot y - 0{,}80678440 \cdot z$

$-0{,}89790718 + 0{,}89790383 \cdot x - 0{,}20287080 \cdot y - 0{,}80623129 \cdot z$

$-0{,}89602199 + 0{,}89607189 \cdot x - 0{,}20426519 \cdot y - 0{,}80294483 \cdot z$

$-0{,}87585471 + 0{,}87578935 \cdot x - 0{,}21825494 \cdot y - 0{,}76700699 \cdot z$

$-0{,}83065034 + 0{,}83051025 \cdot x - 0{,}24176961 \cdot y - 0{,}68974728 \cdot z$

$-0{,}78609545 + 0{,}78583770 \cdot x - 0{,}25715168 \cdot y - 0{,}61754899 \cdot z$

$-0{,}72075315 + 0{,}72045698 \cdot x - 0{,}26935250 \cdot y - 0{,}51905826 \cdot z$

$-0{,}72070482 + 0{,}72040587 \cdot x - 0{,}26935576 \cdot y - 0{,}51898462 \cdot z$

$-0{,}63331155 + 0{,}63295083 \cdot x - 0{,}27115468 \cdot y - 0{,}40062676 \cdot z$

$-0{,}45393486 + 0{,}45355847 \cdot x - 0{,}23707739 \cdot y - 0{,}20571529 \cdot z$

$-0{,}45387612 + 0{,}45350317 \cdot x - 0{,}23706048 \cdot y - 0{,}20566512 \cdot z$

$-0{,}28046876 + 0{,}28021624 \cdot x - 0{,}16810450 \cdot y - 0{,}07852114 \cdot z$

$0{,}21969223 - 0{,}21937890 \cdot x + 0{,}17129678 \cdot y - 0{,}04812710 \cdot z$

$0{,}38992051 - 0{,}38929187 \cdot x + 0{,}32445695 \cdot y - 0{,}15154825 \cdot z$

$0{,}47261533 - 0{,}47184306 \cdot x + 0{,}40477467 \cdot y - 0{,}22263587 \cdot z$

$0{,}75994697 - 0{,}75848578 \cdot x + 0{,}71121659 \cdot y - 0{,}57530680 \cdot z$

Conditio minimi respectu z

$0 = -0{,}18829376 + 0{,}18790446 \cdot x - 0{,}19772944 \cdot y - 0{,}54080177 \cdot z$

AAN MIJNEN VRIEND,

P. VAN GALEN,

BIJ ZIJNE BEVORDERING TOT DOCTOR IN DE WIJSBEGEERTE.

> Vergeefs Natuur bespied!
> Ge ontdekt den sluijer niet
> Van haar geheimenissen.
> Maar wie haar wet beschouwt,
> Ziet nooit den vasten regel missen,
> Die 't al in wezen houdt.
>
> SIMONS.

Bij heldren nacht rigt gij uw starend oog
Met eerbied op, naar 's Hemels ruimen boog,
Gij volgt de sterren na, zoo lang ze blinken,
Tot ze in den nacht des eeuw'gen afgronds zinken,
Meet hun verwijl, en met een tooverwoord
Roept gij ze weer, en uit den nacht hervoort!
Gij ziet de spil van honderdduizend radren,
Die voor ons oog zich eeuwig vliên, en nadren;
Toch speurt uw blik in elk verschillend deel,
Hoe scheemrend ook, een groot en trotsch geheel.
Dan zinkt gij weg en zwijmelt in gedachten,
En leert het stof en 't ijdele verachten.

Daar daalt een floers voor 't menschelijk gelaat
Van 's Hemels tin, tot waar geen wind meer gaat,
Waar zelfs geen ster meer ronddwaalt met geflonker:
Geen zon meer staat in 't grenzelooze donker;

't Zijn Cherubs zelfs, die, scheemrig van den dag,
Die God omstraalt en bevend van ontzag,
Het groot tapijt, uit 's Hemels ruime zalen
Ontrold, langs de aard in d' afgrond laten dalen:
Gij hebt één span den voorhang opgeligt;
't Was alles gloed en vlam voor uw gezigt!

Hier kan op aard, waar koude nevels dwalen,
Des dichters borst geen' vrijen adem halen,
Hij gaat gedrukt — gebogen naar den grond;
Maar 't treurend oog zweeft boven 't wereldrond.
Wat vreemde kracht, die ons heeft ingenomen!
Die beelden schept! in psalmen uit doet stroomen!
Die 't reinst besef der zuivre Godheid kweekt,
Oneindig groot, zoo als Natuur haar preekt.
Die ons verplet, als onze hymnen schallen,
Daar wij verrukt voor God ter nedervallen:
Wij zien een Geest, die 't nimmer dovend vuur
Door 't koud heelal doet stroomen op den duur.
Al durft ons oog Jehovah's glans niet nadren,
Toch wagen wij in 't donkre boek te bladren
Waarin 't geheim der raadsels is gehuld,
Daar heilige angst des zangers borst vervult!
Hij treedt terug, maar met eerbiedig beven,
Dan klinkt zijn harp van God en 't eeuwig leven,
En houdt men 't oor naar 't dichtgeluid gerigt;
't Was alles gloed en vlam voor zijn gezigt.

Die zucht, mijn vriend! dat raadselachtig haken
Naar 't SCHOON en WAAR, dat ge in uw borst voelt blaken
Doch nooit voldaan nog steeds naar hooger streeft,
Zie daar den band, die ons vereenigd heeft!
Gelijk de ziel, zoo wat haar aan bleef kleven
Van 't SCHOON en WAAR, bloeit schooner na dit leven:
't Onstoflijk IETS eindt met ons hierzijn niet,
En kent geen perk in 't eindloos tijdsgebied.

Mijn God, mijn God! ik hoor den donder knallen
Van pool tot pool. — De zonnestelsels vallen
In d' afgrond neer, — 't is de omkeer der Natuur
Geen zon schijnt in den nacht, — slechts bliksemvuur
Dwaalt slingrend door de lucht, — planeten
En zonnen botsen zaam, hun perk vergeten
Aan 's Hemels baan, de melkweg stroomt uit een,
En spat en golft door heel de wereld heen.
Beef niet! — 't is stof, die de Almagt gaat verdelgen,
En 't ijdel Niet zal al de stof verzwelgen.
De geest alleen, die hooger oorsprong nam,
Zweeft hooger op, en smelt in hellen vlam:
Die vlam is God — hier bleven wij vertrouwen —
Heil ons! mijn vriend! ons hopen werd aanschouwen —
Reeds drinkt en zwelgt ons wellustdronken oor
Het maatgezang van 't jublend englenkoor,
De voorhang week, en werd uit 's Hemels zalen
In d' afgrond neergestort — geen stralen
Verblinden meer ons oog, op God gerigt;
't Is alles wijs en groot voor ons gezigt!

B. W. A. E. SLOET.

AAN MIJN' VRIEND

P. VAN GALEN,

BIJ ZIJNE BEVORDERING TOT DOCTOR IN DE NATUURLIJKE WIJSBEGEERTE.

Zie vrolijk om, mijn vriend! naar de afgelegde baan,
Geen traagheid hield u op, geen misstap deed u dwalen;
Wat ook de toekomst geev', gij staart haar rustig aan,
En zult der wijzen lof, in 't perk der eer, behalen.
De lofspraak, wel verdiend, weêrgalmt in 't vroom gemoed,
Dat wetenschap en deugd houdt voor zijn hoogste goed.

A. SIMONS.